QUASINORMAL MODES IN A BLACK HOLE SPACETIME



黑洞

时空中的似正规模

王春艳 著



東北大學出版社
Northeastern University Press

黑洞时空中的
似正规模

Quasinormal modes in a black hole spacetime

ISBN 978-7-5517-0310-9



定价：21.00元

黑洞时空中的似正规模

王春艳　著

东北大学出版社
·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

黑洞时空中的似正规模／王春艳著．— 沈阳 ：东北大学出版社，2013.4
ISBN 978－7－5517－0310－9

Ⅰ.①黑…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①黑洞—研究　Ⅳ.①P145.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 076528 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph@neupress.com
Web：http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm×240mm
印　　张：5.5
字　　数：102 千字
出版时间：2013 年 4 月第 1 版
印刷时间：2013 年 4 月第 1 次印刷
策划编辑：王兆元
责任编辑：刘　莹
责任校对：刘乃义
封面设计：刘江旸
责任出版：唐敏智

ISBN 978－7－5517－0310－9　　　　定　价：21.00 元

前 言

黑洞，作为广义相对论预言和描述的一类具有神秘特性的天体，一直是物理学和天文学研究的一个热门话题。现有的研究表明，黑洞的很多性质暗示出物理学的基本规律与时空属性之间可能存在着深刻的内在联系。

爱因斯坦广义相对论认为，物质的存在会造成时空的弯曲，而在时空弯曲得非常厉害的地方时空几何性质会发生变化，进而形成黑洞。然而，由于黑洞自身特殊的结构和性质，天文观测者迄今为止都没有获得一个直接的证据证明黑洞的真实存在。自霍金辐射被发现以后，人们认识到黑洞具有温度和热辐射，黑洞是一个真正的热力学系统。黑洞微扰理论表明，如果给黑洞一个微扰，当微扰衰退后，黑洞仍能回到一个平衡状态。研究结果表明，微扰场演化的似正规模阶段只与黑洞的背景时空性质有关，与初始的扰动形式无关。因此，不同的黑洞应该具有不同的似正规模频率。

本书较为系统地阐述了黑洞的基础理论、黑洞似正规模频率的研究方法和意义，以及几类黑洞时空的似正规模频率。全书共分为 4 章，第 1 章介绍了黑洞的基础理论，具体包括黑洞的提出、形成机制、天文观测、分类以及黑洞的热力学性质。第 2 章介绍了黑

洞的微扰理论，侧重说明似正规模阶段的研究意义和研究方法。第3章介绍了有Quintessence暗能量包围黑洞的低频似正规模，包括标量场、引力场、电磁场和Dirac场扰动，并且详细分析了似正规模频率与黑洞背景时空基本参量之间的变化关系。第4章介绍了变形Hořava-Lifshitz引力理论中黑洞时空的似正规模频率。

随着理论研究和天文观测的发展，本书中的研究方法和结论也有待更新和修正。由于作者水平有限，文中难免有错误和不当之处，欢迎各位读者批评指正。

作　者

2013年4月

目 录

第1章 黑洞基础理论

天空中存在着黑暗的天体，像恒星那样大，或许也像恒星那样多。一个具有与地球同样密度而直径为太阳250倍的明亮星球，它发射的光将被它自身的引力拉住而不能被我们接收。正是由于这个道理，宇宙中最明亮的天体很可能却是看不见的。

——Pierre Simon Laplace（1796）[1]

1.1 黑洞的提出

黑洞是广义相对论预言的一种特殊天体。爱因斯坦广义相对论认为，物质的存在会造成时空的弯曲，人们通常所说的万有引力就是时空弯曲的表现。在时空弯曲得非常厉害的地方，时空几何性质会发生重要的变化，形成黑洞。

从万有引力定律可以知道，星体的引力对物体有束缚作用，物体只有具有足够大的速度才能摆脱星体的束缚，这个阈值被称为“逃逸速度”。一般来说，星体的质量越大、密度越大，物体从它表面逃离所需的速度就越大。当星球的密度达到一定程度时，物体的逃逸速度必须大于光速，否则它就不可能逃离这颗星球。最早预言黑洞的人是英国的米歇尔（R. J. Michell）和法国的拉普拉斯（P. S. Laplace），他们从牛顿力学和光的微粒说出发，预言了“宇宙中最明亮的天体很可能却是看不见的”。在当时的学术界，光的微粒说占据上风，认为光也受万有引力作用，因此，当一颗恒星的万有引力强大到可以把自身发射的光子拉回来的时候，这颗星就将成为外部观测者看不见的“暗星”了。

依据牛顿的能量理论可以算出这类“暗星”的形成条件。设光子质量为m，光速为c，星球的质量为M，半径为r，则从星球表面射出的光子的动能和势能分别表示为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mc^2 \tag{1-1}$$

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{GMm}{r} \tag{1-2}$$

其中，G 是万有引力常数。

当光子的动能不大于势能，即

$$\frac{1}{2}mc^2 \leqslant \frac{GMm}{r} \tag{1-3}$$

时，它就不可能逃离星球了，那么相对于远处的观测者来说，星球就是不可见的。

因此，从(1-3)式可有

$$r \leqslant \frac{2GM}{c^2} \tag{1-4}$$

这就是拉普拉斯等人给出的“暗星”的形成条件。它表明，当一个星球的质量和半径之间满足(1-4)式的关系时，这个星球发射的光将被万有引力拉回去，而这颗星就是不可见的。

当19世纪初光的干涉实验被成功完成时，光的波动说登上了历史舞台，这使得拉普拉斯等人在微粒说基础上得出的“暗星”形成条件((1-4)式)的正确性受到质疑。后来，美国物理学家奥本海默(J. R. Oppenheimer)和施耐德(H. Snyder)从爱因斯坦广义相对论出发，再一次预言了“暗星”的存在。他们认为，当某个时空区弯曲得非常厉害的时候，光线将不能从那个区域逃离到远方。在远方观测者看来，这个区域将是一颗看不见的“暗星”。

有趣的是，奥本海默从广义相对论得出的“暗星”形成条件，在形式上与拉普拉斯等人从牛顿理论给出的暗星条件完全相同。但是，随着物理学的发展，今天来看(1-1)式和(1-2)式的推导时，将会发现两个错误：第一个错误是光子的动能不应该是$\frac{1}{2}mc^2$，而应该是 mc^2；第二个错误是描述引力的不应是万有引力定律，而应该是广义相对论。巧合的是，这两个错误相互抵消，最终得到了正确的结论。但这里需要指出的是，在拉普拉斯时代，人们并不知道光速是速度的极限，因此，人们认为即使光子逃不出去的“暗星”，也许还有其他物体可以逃离。而广义相对论认为，光速是物体和信号的最大传播速度，也就是说，光都逃不出去的暗星，任何物体和信息也都逃不出去。

奥本海默预言的“暗星”，就是今天所说的“黑洞”。然而，他对“暗星”的预言，一开始就遭到爱因斯坦(A. Einstein)和惠勒(J. Wheeler)等人的反对，他们认为，一定有某种物理机制会阻止恒星塌缩成“暗星”。因此，

“暗星”理论长时期没有受到物理学界的重视。爱因斯坦始终不承认“暗星”存在的可能性，而惠勒等人则经过长期的反对和钻研之后，改变了自己的观点，认识到奥本海默预言的“暗星”是可能存在的，并最终为“暗星”起名为“黑洞”。

1.2 黑洞的形成机制

黑洞概念被提出以后的几十年里，黑洞物理逐渐成为天体物理学的一个前沿热门话题。那么黑洞是如何形成的呢？这个话题需要从恒星的演化与引力塌缩谈起[2]。

通过指向空中的望远镜可以发现，数以千亿计的恒星各式各样，它们不仅光度不同，而且颜色各异。这里的光度是指恒星的绝对光度，即反映恒星在单位时间内释放出的光能。从绝对光度可以估算出恒星的体积，而恒星的颜色则反映了它们具有不同的表面温度。1907 年，丹麦天文学家赫兹普隆(E. Hertzsprung)发现，恒星的颜色和光度之间存在一定的统计关联，并于1911 年将测定的银河星系团中的几个恒星的颜色和光度画在同一张图上，用表面温度作为横轴，光度作为纵轴，如图 1-1 所示。可以发现，大多数恒星都集中在图上一些特定的小区域内。在 1913 年，美国天文学家罗素(H. Russell)通过研究图 1-1 中邻近恒星的光度与表面温度的关系，也独立地得到了类似的结果，因此，这一关联图被称作赫罗(Hertzsprung - Russell)图，简称H - R图。

H - R 图中能够清晰地体现出恒星的演化过程。如图 1-1 所示，绝大多数恒星都聚集在 H - R 图中从左上方到右下方的一条倾斜的窄带上，因此这条带被称作恒星的主序列，相应的恒星被称为主序星。光度大的主序星表面温度高，颜色偏蓝，位于主序列的左上部；光度小的则表面温度低，颜色偏红，位于主序列的右下部。太阳位于主序列的中部，是黄色的恒星。主序列的右上方有低温而巨大的红巨星，左下方有形体小而高温的白矮星，它们属于恒星演化的不同阶段。若给每一个温度范围定义一个光谱型，从高温的蓝星到低温的红星，依次分为 O，B，A，F，G，K，M 七个光谱型，其中太阳属于黄色的 G 型，其表面温度约为 6000K。另外，还有其他少数恒星位于主序列之外的一些特定区域内，它们分别被称作红巨星、超巨星和白矮星等。从 H - R 图中还可以看到，等 R(半径)线是向右下方倾斜的直线，即右上方是恒星半径增大的方向，所以巨星都是半径很大但温度很低的恒星，而半径小温度高的白矮星则位于主序列的左下部。

恒星的一生是在同引力的斗争中度过的。恒星内每一个气体原子都受到

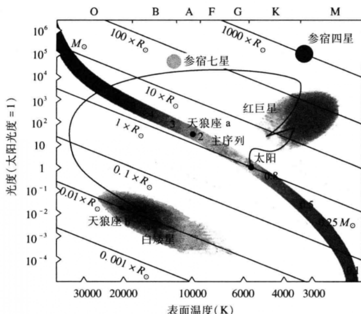


图 1-1 H－R 图中恒星的演化（$R_\odot$为太阳半径，$M_\odot$为太阳质量）

拉向中心的引力，如果恒星没有内部压力对抗这种吸引，这颗星就会向内塌缩，所有原子落向中心而形成黑洞。因此，恒星赖以生存的条件是星体内部存在与引力相抗衡的压力。

弥漫于银河系中的星际物质（尘埃和气体，主要由氢和氦组成），在万有引力作用下，塌缩变热，点燃热核反应成为主序星。在主序星阶段，恒星主要是靠辐射产生的向外膨胀的压力与引力塌缩产生的向内的压力达到平衡来维持的。以太阳为例，在主序星阶段，太阳的核心温度高于 4×10^6 K，一连串反应使核心内的四个氢原子结合成一个氦原子并放出巨大的能量。太阳的含氢量极为丰富，它是一颗巨大的缓慢燃烧的氢弹，至今已燃烧了约 45 亿年。在氢燃烧期间，太阳暂时（约 90 亿年）停止了塌缩。然而，太阳（任何其他恒星也一样）的氢燃烧终究是有限的，一旦耗尽，由中心产生的能量已经不多，再没有足够的力量来承担起外壳巨大的重量。所以，在外壳的重压之下，核心开始塌缩而进一步致密和升温，产生的能量补充恒星发光损失的能量，而进入红巨星阶段。此后，质量不同的恒星将有各自不同的命运，大质量的恒星在主序星阶段停留的时间短于小质量的恒星停留的时间。

如果恒星的质量 M 小于钱德拉塞卡极限 $1.4M_\odot$（$M_\odot$是太阳的质量），则核心物质被压缩到电子也互相紧靠在一起，进而产生巨大的电子简并压，这

种简并压足以抵抗恒星的进一步塌缩，最后稳定下来，成为小而高密、高温的白矮星。而中等质量的恒星，电子被挤压得使其简并压也抗衡不住引力，进一步塌缩，将中子挤压到互相紧靠而产生中子简并压，中子简并压抗衡了引力塌缩而稳定下来并形成中子星。中子星的最大质量不能大于奥本海默极限($3M_{\odot}\sim 4M_{\odot}$)。对于质量大于$25M_{\odot}$的恒星，当它们演化成中子星后其体积将大于中子星的最大体积，因此会再次发生塌缩，当它们的半径收缩到一定程度(视界半径)时，巨大的引力使得即使光也无法向外射出，从而形成黑洞。

1.3 黑洞的天文观测

在黑洞被提出后的很长一段时间里，对黑洞的研究都只是停留在纸面上，宇宙中是否真的存在黑洞一直是个谜。1925 年 12 月，在广义相对论发表不到一个月时，施瓦希(K. Schwarzschild)得到爱因斯坦场方程的第一个精确解(真空球对称解)，它可以描述一个静止球对称无电荷星体的外部场。除了施瓦希解以外，爱因斯坦场方程还存在很多其他解。如 20 世纪 60 年代克尔(Kerr)得到了旋转物体的爱因斯坦场方程的真空外部解，并被纽曼(Newman)推广到带有荷电的情况，给出了稳态黑洞外的引力和电磁场的描述，即 Kerr-Newman 黑洞。同时期，1962 年致密 X 射线源的发现，1963 年类星体的发现，1967 年脉冲星的发现，都大大推动了对黑洞的理论研究和实验探索，大量有关黑洞的重要性质和定律被发现，天体物理学家也开始考虑探测黑洞存在的可能性。

目前已知的寻找恒星级黑洞的途径是由双星系统提供的。当双星系统中一个子星的气体被另一个子星吸积时，便会发出很强的 X 射线辐射，因此，在有 X 射线的双星系统中，如果一个子星的质量超过中子星质量的上限，且光学不可见，那么这个子星就很可能是黑洞。最典型的是天鹅座 X-1。天文学家们对天鹅座研究后发现，它是一个很强的 X 射线辐射源，在它附近有一颗大约 5 倍于太阳质量的普通恒星围绕着发出 X 射线源的地方旋转。对这一现象的最好解释是，物质从可见星的表面被吹起来，当它落向不可见的伴星时，其运行轨迹呈螺旋状，并且变得非常热而发出 X 射线，如图 1-2 所示。为了使这一机制起作用，不可见伴星必须非常小，像白矮星、中子星或黑洞那样。从观察那颗可见星的轨道，人们可估算出不可见伴星的最小质量。对于天鹅座 X-1 的情形，不可见伴星的质量大约是太阳质量的 6 倍。根据钱德拉塞卡极限可知，这颗不可见星的质量太大了，所以它既不可能是白矮星，

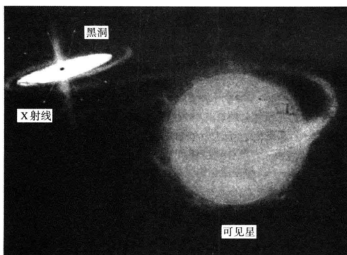


图 1-2　天鹅座 X - 1

也不可能是中子星。另外，它虽然不发光，但能够发出 X 射线，由此可以推断它只能是一个黑洞。

1994 年 2 月 27 日，哈勃太空望远镜拍摄到了室女座的椭圆星系 M87（这个星系位于一个称为室女座星系团的中心，它要比一般的星系大很多，直径足足有 12 万光年，比整个银河系还要大，距离地球大约有 5000 万光年）中心存在旋涡状气体云盘的照片，如图 1-3 所示。从整个云盘中发现，M87 的大



图 1-3　室女座椭圆星系 M87

部分物质是温度高达10000℃左右而处于电离状态的氢气。计算结果显示，在云盘高速旋转的盘状区域中心，应该存在一个质量相当于30亿个太阳质量，而体积却并不超过太阳系的天体。由于其周围并不存在能产生如此巨大能量的其他天体，因此可以推断，如此高能量的粒子喷流是由M87产生的。对这一现象的最好解释就是此处存在黑洞。

此外，加利福尼亚大学的天文学家们也声称，他们已经探测到了以每秒200千米的速度绕银河系中心运动的气体流。离银河系的中心越近，气体流的速度就越快。并且他们已测到了星系中心的射电源，其能量非常巨大，但是体积却非常小，因此他们认为在银河系的中心很可能有一个黑洞存在。

1.4 黑洞的分类

20世纪70年代初，卡特(B. Carter)和罗宾逊(D. C. Robinson)等人指出，当星体塌缩形成黑洞后，会丧失除了质量 M、电荷 Q 和角动量 J 以外的其他任何信息，因此，黑洞的全部性质只由这三个参量来确定。也就是说，时空如何弯曲只取决于黑洞的总质量、总角动量和总电荷，与物质的组成成分和结构都没有关系。对于外界观测者来说，只能探测到这三个量而探测不到其他任何信息。我们不可能知道黑洞的过去，也不会知道它是由什么样的星体、在什么时候、以何种方式形成的，所以将无法区分具有相同质量、角动量和电荷的黑洞。黑洞这种不具有可识别特征的现象被惠勒等人称为“无毛定理”。

黑洞，最初是由爱因斯坦场方程的一组解给出的。作为一类具有特殊结构和性质的神秘天体，我们能够获取的它的信息量少之又少，那么，如何区分不同的黑洞呢?

1.4.1 按照黑洞的基本参量分类

为讨论方便，本书采用自然单位制，即 $G=c=1$。根据黑洞的三个基本参量，可以把黑洞分为如下四类。

第一类：Schwarzschild 黑洞——只有质量，不旋转，不带电。

Schwarzschild 黑洞的度规线元为

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1-5}$$

式中的 M 是黑洞质量，它是描述 Schwarzschild 黑洞的唯一参量。上述度规只对真空爱因斯坦场方程成立，它描述的是一个在真空中静止、球对称星体的

外部时空几何结构，如图 1-4 所示。

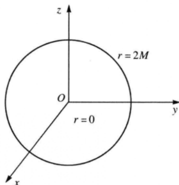


图 1-4　Schwarzschild 黑洞的时空结构图

如果令 $M=0$，度规(1-5)式回到球坐标系下的闵可夫斯基度规情形，显然，无物质存在的时空应该是平坦的。当 $r\to\infty$ 时，度规也趋于闵可夫斯基度规，这表明，在无穷远处，引力场趋于零。所以，Schwarzschild 时空是一种渐近平直时空。

此外，从度规(1-5)式不难看出施瓦希度规在奇点 $r=0$ 和奇面 $r=2M$ 两个地方有奇异。在奇点 $r=0$ 处，不仅度规发散，时空曲率也是发散的。而且，无论选择什么坐标系，这种发散都不能被消除。因此，$r=0$ 处的奇异性是由时空本身性质造成的，被称为“内禀奇点”。而在施瓦希半径 $r=2M$ 的球面上，虽然度规发散，但时空曲率并不发散，并且此面的奇异性可通过爱丁顿坐标变换进行消除。这种由于坐标系的选择不当而引起的奇异性被称为“坐标奇点”。

$r=2M$ 的球面实际上是黑洞的表面，它与拉普拉斯给出的“暗星”形成条件((1-4)式)是一致的。以该球面为界，内部区域与外部区域的时空结构是不同的。内部区域是单向膜区，外部区域的任何物质一旦穿入这个界面，它只能落入黑洞的中心，停止或返回都是不可能的。奇异面 $r=2M$ 也被称为 Schwarzschild 黑洞的视界面。

第二类：Reissner - Nordström 黑洞——有质量，带电，但不旋转。

Reissner - Nordström 黑洞的度规线元为

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1-6}$$

式中的 M 和 Q 分别代表黑洞的质量和电荷。从(1-6)式可以看出，Reissner -

Nordström 黑洞只含有这两个基本参量，它所描述的弯曲时空的几何结构是球对称且不随时间变化的。

研究结果表明，该黑洞时空的度规在 $r=0$ 处有一个时空的内禀奇点。此外，度规在

$$r^2-2Mr+Q^2=0 \tag{1-7}$$

处发散，即在

$$r_{\pm}=M\pm\sqrt{M^2-Q^2} \tag{1-8}$$

这两张球面上也是奇异的。但可以证明，这两个球面上的奇异性是可以通过坐标变换消除的，时空曲率在这里并不发散，所以这里的奇异性不是内禀的。r_- 和 r_+ 分别被称为黑洞的内、外两个视界，这两个视界之间的部分是 Reissner - Nordström 黑洞的单向膜区，如图 1-5 所示。落入该黑洞的物体，一旦穿过外视界 r_+ 进入单向膜区(图 1-5 中的阴影部分)，就将不可抗拒地穿越这个区域，但穿过内视界 r_- 后，物体将能够自由地运动，不至落到奇点 $r=0$ 上。

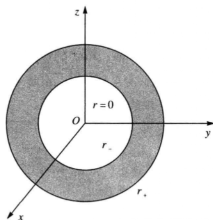


图 1-5 一般 Reissner - Nordström 黑洞的时空结构图

从(1-8)式可以看出，当 $M^2=Q^2$ 时，Reissner - Nordström 黑洞的内、外视界重合于一个面上，即 $r_+=r_-=M$。这时，单向膜区收缩成一个无限薄的膜，这种黑洞被称为极端 Reissner - Nordström 黑洞。若 $M^2<Q^2$，则内、外视界和单向膜区都将消失，而奇点 $r=0$ 裸露出来。裸露的奇点会往外发出不确定的信息，导致时空和物质演化完全不确定。为了避免这一现象出现，彭若斯(R. Penrose)提出了“宇宙监督假设”，即存在一位“宇宙监督”，它禁止裸奇异的出现。

第三类：Kerr 黑洞——有质量，旋转，但不带电。

1961 年，Kerr 给出了爱因斯坦场方程的一个稳态轴对称解，它是一个与 Schwarzschild 时空拓扑结构不同的解。在自然单位制下，它的度规线元为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \left[(r^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2Mra^2\sin^4\theta}{\rho^2}\right]d\varphi^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}dt d\varphi \tag{1-9}$$

其中

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{1-10}$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \tag{1-11}$$

从度规表达式可以看出，Kerr 黑洞主要由质量 M 和角动量 J(在这里，J 由单位质量的角动量 a 来显示，$a = J/M$)来描述。由于$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0$ 且时轴交叉项不为零，所以，该黑洞是稳态轴对称的。

从(1-9)式至(1-11)式可以看出，Kerr 度规在 $\rho^2 = 0$ 和 $\Delta = 0$ 两个位置具有奇异性，即在 $r = 0$ 且 $\theta = \frac{\pi}{2}$处，除了度规是发散的，时空曲率也是发散的，该处为 Kerr 黑洞的内禀奇异区。后来，Kerr 的研究证明，这个内禀奇异区不是奇点，而是一个奇环；在 $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ 两个奇异面上，时空曲率不发散，这两个奇异面为 Kerr 度规的内、外视界面，它们是坐标奇异的。如图 1-6 所示，阴影部分 $r_- < r < r_+$ 是 Kerr 黑洞的单向膜区。

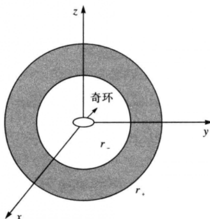


图 1-6　一般 Kerr 黑洞的时空图

第四类：Kerr - Newman 黑洞——有质量、有电荷的旋转黑洞。

Kerr - Newman 黑洞描述的是一个转动的带电星体的外部时空的引力场，

它的度规线元为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[(r^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{(2Mr - Q^2)a^2\sin^4\theta}{\rho^2}\right]d\varphi^2 - \frac{2(2Mr - Q^2)a\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\varphi \tag{1-12}$$

其中

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{1-13}$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \tag{1-14}$$

式中的 M，Q 和 a 分别代表黑洞的质量、电荷和单位质量的角动量。可见，Kerr - Newman 黑洞是由这三个基本参量决定的。

与 Kerr 黑洞相似，Kerr - Newman 黑洞也是一个稳态轴对称的弯曲时空，度规中不包含 t 和 φ，且时轴不正交，$g_{03} \neq 0$。Kerr 黑洞是迄今为止最具一般性的稳态黑洞。

不难发现，当 $M \neq 0$，$J \neq 0$ 但 $Q = 0$ 时，Kerr - Newman 黑洞回到 Kerr 黑洞情形(1-9)式；当 $M \neq 0$，$Q \neq 0$ 但 $J = 0$ 时，回到 Reissner - Nordström 黑洞时空(1-6)式；当 $M \neq 0$ 但 $Q = 0$，$J = 0$ 时，回到 Schwarzschild 黑洞时空(1-5)式。

由(1-12)式和(1-13)式可知，Kerr - Newman 黑洞在 $r = 0$ 且 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处存在一个奇环，在该奇环上，时空曲率和度规均是发散的，说明这个奇异性是内禀的；此外，由(1-12)式和(1-14)式也可以找到 Kerr - Newman 黑洞的两个视界面：

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \tag{1-15}$$

在这两个球面上，度规存在坐标奇异性。

1.4.2 按照黑洞质量大小分类

现代天体物理学认为，按照自身质量的大小，黑洞大致可以分为如下四类：

第一类是可观测的宇宙(大黑洞)，其尺度约为 10^{10} 光年，质量约为太阳质量的 10^{22} 倍；

第二类是超大质量的黑洞，也称为星系级巨型黑洞，其尺度约为 3 光年，质量约为太阳质量的 $10^6 \sim 10^9$ 倍，甚至更大；

第三类是恒星质量级的黑洞，其尺度约为 30km，质量为几个到十几个太

阳质量；

第四类是原初微型黑洞，其尺度只有原子大小(10^{-8} cm)，也被称为“微量洞”，此类黑洞的质量却非常大。

对于前两类巨星黑洞——可观测的宇宙和超大质量的黑洞，不可能直接由恒星塌缩而形成，因为由恒星塌缩而形成的黑洞的最大质量也不过为太阳质量的10倍左右。那么巨型黑洞是怎么形成的呢？研究结果表明，其形成途径主要有以下三条：首先，在宇宙创生初期，有各种尺度的黑洞形成，其中包括巨型黑洞；其次，质量大于可蒸发黑洞质量上限(10^{26}克)的黑洞将吸收宇宙中的能量，所以，较小尺度的黑洞完全可以通过吸收物质逐渐增大而最终变成巨型黑洞；第三种则是由大量恒星组成的恒星系团发生引力塌缩而形成的。

关于恒星级黑洞，它既可以通过宇宙创生初期形成，也可以由恒星的引力塌缩形成。关于其塌缩所形成的机理，可参看1.2节。

在大爆炸的初始时刻，宇宙的压强和能量非常巨大，可以形成不同质量类型的黑洞，其中包括微型黑洞。微型黑洞的质量相当于一座大山，而尺度却如同一个基本粒子。此类黑洞与现在宇宙中形成的黑洞在产生机理上完全不同，后者的形成基于恒星的引力塌缩，要求有大量的物质，其形成的黑洞具有最小的尺度和质量限制($3M_{\odot}\sim4M_{\odot}$)。而微型黑洞只能在宇宙早期形成，根据黑洞的寿命与其质量的立方成正比可以知道，黑洞的质量越小，蒸发得就越快；而质量大的黑洞则会吸收周围宇宙的能量，从而增大自己的尺度和质量。热力学计算表明，在微波背景辐射温度为2.7K的宇宙中，只有质量低于10^{26}克（相当于月亮的质量，半径为0.1mm)的黑洞才能蒸发。在宇宙创生初期所形成的黑洞中，质量低于10^{15}克的已经蒸发掉；质量介于$10^{15}\sim10^{26}$克之间的正在蒸发；而质量大于10^{26}克的正在增大，其中包括由恒星塌缩形成的二代黑洞。

另外，现今也有证据表明，存在质量处于$10^2M_{\odot}\sim10^4M_{\odot}$范围内的中等质量黑洞，对这类黑洞存在证据和形成机制的讨论还存在较大的争议。天文观测发现，在一些旋涡星系中，某些星体在X射线波段亮度极高，超过爱丁顿光度好多倍，称为超亮X射线源。如果它们的结构和恒星级质量黑洞一样，那么这么高的亮度需要更高的质量才能支持，因此它们被怀疑是中等质量的黑洞。通过对X射线源的能谱进行分析，能够发现它们的吸积盘温度也与中等质量黑洞相符合。但是，也有很多人认为，X射线源并不是中等质量黑洞，它们有可能是各向异性辐射，或是特殊的吸积盘流体动力学结构(如细盘，slim disk)，也可能是遥远的类星体经过引力透镜的效果。

1.5 黑洞的热性质

在经典的广义相对论理论中，黑洞是这样一颗星，任何物质都可以掉进去，但任何物质都跑不出来，当然辐射也不能例外。像这样只吸收辐射而不反射辐射的物体与普通物理学中的一个特殊客体“黑体”有着惊人的相似之处。黑体是一种理想的物体，它的性质只由一个参量——温度——来决定。研究发现，黑体虽然不反射辐射，但它却能发射辐射。这是一种最简单的辐射，由于它的能谱只取决于温度，因而被称为热辐射或者黑体辐射。另外，落入黑洞内的物体会失去它几乎全部的信息，而信息相当于负熵，因此，黑洞形成的过程和物体落入黑洞的过程，都是熵增加的过程。由此可以推断，黑洞同黑体一样也能发射辐射，它也具有热性质。

对黑洞的大规模研究是在20世纪60年代展开的，人们从几何学和经典物理学的角度澄清了黑洞的许多性质。而突破性的进展发生在70年代。首先是霍金(Hawking)提出了面积定理。他指出，黑洞的表面积随着时间的发展，只会增加而不会减少。接着，贝肯斯坦(J. Bekenstein)大胆地推测出黑洞的表面积很可能就是黑洞的“熵”。这一猜测刚一提出就遭到霍金等人的反对，他们认为，贝肯斯坦曲解了面积定理。因为如果黑洞有熵，从热力学角度来看，黑洞也应该有温度，有温度就会有热辐射，而黑洞是一个只进不出的天体，怎么可能有热辐射呢？因此，霍金等人在1973年发表文章，否认黑洞具有真正的热性质。但一年以后，霍金的态度来了个一百八十度的大转弯，他不仅承认黑洞的表面积是熵，黑洞具有温度，而且用弯曲时空量子场论证明了黑洞有热辐射，这也就是著名的霍金辐射。

1.5.1 面积定理

1971年，霍金在宇宙监督假设和强能量条件$\rho+3P>0$（时空中应力不能太负）成立的情形下，证明了面积定理，即黑洞视界的表面积在顺时方向永不减少，有

$$\delta A \geqslant 0 \tag{1-16}$$

式中的A是黑洞的视界面积。面积定理的意思是说，两个黑洞可以合并为一个，合并后的总面积大于合并前的总面积。但是一个黑洞不能分裂为两个，因为分裂后的总面积小于分裂前的总面积，这将违背面积定理。

面积定理具有时间的单向性，这一性质不禁让人们想起了普通热力学中的熵S。在热力学中，熵在绝热过程中(或在孤立系统中)绝不减少，即

$$\delta S \geqslant 0 \tag{1-17}$$

这是热力学第二定律，它是唯一显示时间箭头的物理定律。由此可见，面积定理可以类比于热力学第二定律，而黑洞的表面积 A 可以类比普通热力学中的熵 S。

1.5.2 贝肯斯坦-斯马尔公式

在 1972 年，贝肯斯坦和斯马尔(L. Smarr)各自独立地给出了黑洞质量 M，角动量 J，电荷 Q 等各参量之间的一个重要关系式：

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega\delta J + \Phi \mathrm{d}Q \tag{1-18}$$

这就是著名的贝肯斯坦-斯马尔微分公式。上式中的 A 为视界面积，Ω 是黑洞视界的拉曳角速度，Φ 是黑洞两极处的静电势，κ 为黑洞视界的表面引力。这个公式与转动物体的热力学第一定律表达式

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S + \Omega \mathrm{d}J + V\mathrm{d}Q \tag{1-19}$$

非常相似。式中的 U，T，S，Ω，J，Q，V 分别代表系统的内能、温度、熵、转动角速度、角动量、电荷、表面两极处的静电势。等式(1-19)左边为系统内能的增加；右边第一项为系统在过程中吸收的热量，第二项和第三项为外界对系统做的功。如果把贝肯斯坦-斯马尔公式与热力学第一定律做类比，不难看出(1-18)式左边为黑洞质量的增加，按照质能关系 $E = Mc^2$，质量的增加也就意味着能量的增加；右边第二、第三项可以看作外界对黑洞所做的功；而第一项似乎可以看成吸收的热量。

如果上面的类比正确，那么黑洞应该有与其面积成正比的熵，以及与其表面引力成正比的温度。贝肯斯坦等人通过构成黑洞的物质的微观态的分析，最终给出了黑洞熵和温度的具体表达式(自然单位制下)：

$$S = \frac{k_\mathrm{B}}{4}A \tag{1-20}$$

$$T = \frac{\kappa}{2\pi k_\mathrm{B}} \tag{1-21}$$

式中的 k_B 为波尔兹曼(Boltzmann)常数 。

1.5.3 极端黑洞与宇宙监督假设

根据极端黑洞的性质可知，极端黑洞的表面引力为零，即

$$\kappa = 0 \tag{1-22}$$

如果前面的类比正确，即 κ 确实反映了黑洞的温度，那么极端黑洞应视

为绝对零度的黑洞。

极端黑洞可以看成在不断增加黑洞的角动量和电荷的情形下逐渐形成的，此时黑洞的单向膜区消失，内外视界重合。如果对极端黑洞再进行一次这样的操作，将会导致黑洞的视界彻底消失，以至奇点（或者奇环）裸露出来，从而使时空的因果性遭到破坏，这种情形是宇宙监督假设所不允许的。因为宇宙监督假设告诉人们：在宇宙中存在着这样一位“宇宙监督”，它不允许时空的奇异性裸露，奇点（或者奇环）必须包裹在视界里面。如此看来，宇宙监督假设不允许极端黑洞的形成，也就是不能通过有限次操作把一个非极端黑洞转变为极端黑洞。这与普通热力学第三定律“不能通过有限次操作把一个热力学系统的温度降到绝对零度”极为相似。这样看来，宇宙监督假设很可能就是普通热力学第三定律在黑洞时空中的具体体现，同热力学第三定律一样，它也是一条独立的公理。

1.5.4 稳态黑洞的表面引力

在普通热力学中，还有一条定律，通常它被表述为热平衡具有传递性。这条定律的一个必然结果就是热平衡系统各点有相同的温度。前面已经提到，黑洞视界的表面引力相当于普通热力学中的温度。如果关于黑洞力学与普通热力学的类比正确，那么在黑洞情况下，也应该存在一条类似于普通热力学中第零定律的规律。

一个渐近平直的稳态黑洞，就是一个孤立的、不随着时间变化的引力系统，因此，它应该处于一种热平衡状态，具有相同的温度，换句话说，稳态黑洞视界表面各点的表面引力 κ 是一个常数。

综上所述，黑洞力学的四条定律可以总结如下：

第零定律：稳态黑洞视界的表面引力（温度）是一个常数；

第一定律：能量守恒定律，由贝肯斯坦-斯马尔微分公式（1-18）来表示；

第二定律：黑洞面积在顺时方向永不减少，$dA \geqslant 0$；

第三定律：不能通过有限次操作把黑洞表面引力降低到零。

上述四条定律起初只是形式上与普通热力学四条定律相类比，并没有实际意义。因为霍金等人并没有把黑洞温度看作真实温度，他们认为，黑洞没有热辐射。因此，人们把上述四条定律叫作黑洞力学四定律。后来，霍金利用当时刚刚发展起来的弯曲时空量子场论去考察黑洞附近的量子场行为，发现黑洞精确地按照普朗克（Planck）谱向外辐射它的能量，而且辐射的特征温度确实与黑洞视界的表面引力成正比。可见，黑洞确实是一个热力学系统，它有温度，有热辐射。于是，关于黑洞的力学四定律成为真正意义上的热力

学四定律。

1.6 霍金辐射

1973 年，霍金利用量子场论的方法，对一颗塌缩星体正在形成黑洞的过程进行半经典计算，证明了黑洞并不“黑”，而是由于在视界附近有量子涨落，黑洞会发生辐射。霍金辐射是标准的热辐射，只与黑洞的温度有关。黑洞量子热效应的发现表明黑洞的温度是真实的温度，黑洞不是一个只进不出的洞，它能够向外热辐射粒子。恒星形成了黑洞，并没有到达最后的归宿，它还会继续演化，演变成其他的物质形态。这一结论在弯曲时空量子场论的发展过程中起到了至关重要的作用，它不仅为贝肯斯坦以唯象的方式构造的黑洞热力学提供了理论支持，而且解决了用热力学描述黑洞时出现的矛盾，揭示了引力、热力学和量子理论之间具有深刻的内在联系。

然而大家知道，黑洞内部存在单向膜区，视界就是单向膜区的起点，物质只能通过单向膜区落入黑洞里面，那么又怎能从黑洞里面跑出来，成为热辐射呢？下面用真空涨落来解释黑洞霍金辐射的物理机制。

所谓真空，并不是严格意义上的“空”，它是由正电子和负电子旋转波包组成的系统，因此，会不断有虚的正反粒子对在真空中产生和湮灭。填满的负能“粒子海”中，不断发生负能粒子跃迁过禁区跳向正能态的虚过程。在这一过程中，产生虚的正能粒子和虚的负能空穴，它们的产生不遵守能量守恒定律。但这一过程是非常短暂的，正反粒子对产生后又很快湮灭，恢复为真空态。根据量子力学的测不准关系，任何可以测量的实过程都必须满足如下测不准关系：

$$\Delta t\Delta E \geqslant \frac{\hbar}{2}, \qquad \Delta x\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{1-23}$$

反之，若满足

$$\Delta t\Delta E < \frac{\hbar}{2}, \qquad \Delta x\Delta p < \frac{\hbar}{2} \tag{1-24}$$

的虚过程，则是不可测的，这一虚过程可以不遵守能量守恒定律和动量守恒定律。虚粒子对的能量若是 ΔE，则它们存在的时间为

$$\Delta t < \frac{\hbar}{2\Delta E} \tag{1-25}$$

可见，虚粒子对从产生到湮灭的整个过程是非常短暂的。如果有人试图去测量虚粒子的存在，短暂的时间将导致很大的能量涨落，这一涨落自动掩

盖了虚粒子的存在。但是，霍金指出，如果上述真空涨落发生在黑洞表面附近，则会导致明显的物理效应。

对于黑洞来说，在黑洞视界附近的真空涨落，产生的虚粒子对有以下几种运动方式，如图1-7所示。第一种是产生的正负粒子对重新相碰并湮灭，第二种是两个粒子都落进黑洞内部。很明显，这两种情况都与黑洞热辐射的产生无关。第三种情况是虚粒子对中的一个落入黑洞，另一个则飞向远方，由于黑洞内部允许负能粒子存在，因此负能反粒子穿过单向膜区落到奇点上，使那里的能量减少。而减少的能量正好等于飞向远方的正能粒子的能量。这一过程相当于黑洞向外辐射了一个正能粒子。这种情况恰好能够产生黑洞热辐射。

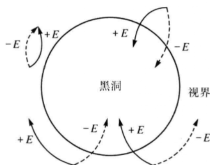


图1-7 黑洞附近的霍金辐射

虚粒子对中的一个掉进黑洞，另一个留在外面，这是虚粒子对实化的过程。通过虚粒子实化，这两个粒子将不再湮灭，而是要作为实粒子长期存在下去。但是由于黑洞内部的单向膜区允许负能实粒子存在，而黑洞外部不允许负能实粒子存在，因此应该是负能实粒子掉进黑洞，正能粒子留在黑洞外面实化并飞向远方。这种过程也可以等价地理解为：一个正能粒子(电子)逆着时间顺序从起点穿过单向膜区到达黑洞表面，在那里被视界散射，再顺时飞向远方。这就导致一种不对称的、可观测的效应，即被称为霍金辐射的黑洞热辐射。

最初，霍金利用量子场论的方法，考虑一颗塌缩星正在形成Schwarzschild黑洞的过程，并且通过Bogoliubov变换给出渐近平直区域的出射和入射真空的产生与湮灭算符之间的关系，发现，在出射区观察入射真空态会有粒子产生。再通过解析延拓和几何光学近似，可以精确地得出射粒子谱为黑体谱的结论。继霍金之后，人们相继提出了很多种其他方法来研究霍金辐射，主要的有路径积分方法[3]、零测地线方法[4]、引力与规范反常相消[5-7]和格

林函数法[8]等。

下面以四维 Schwarzschild 黑洞为例，介绍用格林函数法证明霍金辐射。黑洞的度规线元见(1-5)式，另外，可以知道 $r=2M$ 是黑洞的坐标奇点。

1960 年，克鲁斯卡(Kruskal)首先找到了一个能够消除坐标奇点，且具有最大解析范围的动态度规——克鲁斯卡度规。通过克鲁斯卡坐标变换为

$$T=\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{\frac{r}{4M}}\sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{1-26}$$

$$R=\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{\frac{r}{4M}}\cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{1-27}$$

式中的$(T,\ R)$是克鲁斯卡坐标，且 $r>2M$。因此，Schwarzschild 黑洞的度规在克鲁斯卡坐标系下的表达式为

$$ds^2=\frac{32M^3}{r}e^{\frac{r}{2M}}(-dT^2+dR^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1-28}$$

从(1-28)式的号差可以判断，T 是时间坐标，R 是空间坐标。式中的 r 与 T 和 R 的关系可以由下式决定：

$$16M^2\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{\frac{r}{2M}}=R^2-T^2 \tag{1-29}$$

把施瓦希时间延拓到虚轴，令 $\tau=it$，则(1-26)式和(1-27)式可以变为

$$T=\left(\frac{r}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{r}{4M}}\sin\frac{\tau}{4M} \tag{1-30}$$

$$R=\left(\frac{r}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{r}{4M}}\cos\frac{\tau}{4M} \tag{1-31}$$

进而(1-28)式可改写为

$$ds^2=\frac{32M^3}{r}e^{\frac{r}{2M}}(dT^2+dR^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1-32}$$

从(1-32)式中可以看出，克鲁斯卡时空不再是静态的。然而，它的度规分量在引力半径处不再奇异，即在 $T=0$ 或者 $R=0$(即 $r=2M$)处的奇点已经不存在了，这说明克鲁斯卡坐标变换能够消除坐标奇异性。

从(1-30)式和(1-31)式可知，T 和 R 都是虚时 τ 的周期函数，周期为 $8\pi M$，所以，任何以 T 和 R 为变量的连续函数都将是 τ 的周期函数。克鲁斯卡时空中的费曼传播子(零温)欧氏化以后，也是关于 τ 的周期函数。另外，具有虚时周期性是温度格林函数的特征：

$$G_T(\vec{x},\ t)=e^{\mu\beta}(-1)^{2s}G_T(\vec{x},\ t+i\beta) \tag{1-33}$$

式中的 μ 是化学势，s 是粒子的自旋，虚时周期 $\beta=\frac{1}{K_B T}$。可见，克鲁斯卡时

空中的零温传播子变成施瓦希时空中温度为

$$T=\frac{1}{8\pi MK_B}=\frac{\kappa}{2\pi K_B} \tag{1-34}$$

的温度格林函数。这表明，Schwarzschild 黑洞时空与外界存在温度为 T 的热平衡。当然，这也说明了黑洞具有温度为 T 的热辐射。

黑洞发射热辐射，因而具有温度，这意味着包括 Schwarzschild 黑洞在内的一切黑洞，都不再是一颗死亡的星体，而有着丰富的内涵。黑洞不断地吸收周围的物质和能量，同时不断地向周围发出热辐射。黑洞是一颗具有生命力的星体，是恒星演化的一个中间环节而不是最终结局。

本章参考文献

[1] 约翰·皮尔卢米涅. 黑洞 [M]. 长沙：湖南科学技术出版社，2001：3.

[2] 赵峥. 黑洞与弯曲的时空 [M]. 太原：山西科学技术出版社，2001：109.

[3] Hartle J B, Hawking S W. Path-integral derivation of black-hole radiance [J]. Physical Review D, 1976, 13(8): 2188.

[4] Parikh M, Wilczek F. Hawking radiation as tunneling [J]. Physical Review Letters, 2000, 85(24): 5042.

[5] Robinson S P, Wilczek F. Relationship between Hawking radiation and gravitational anomalies [J]. Physical Review Letters, 2005, 95(1): 011303.

[6] Iso S, Umetsu H, Wilczek F. Hawking radiation from charges black holes via gauge and gravitational anomalies [J]. Physical Review Letters, 2006, 96(15): 151302.

[7] Iso S, Umetsu H, Wilczek F. Anomalies, Hawking radiations, and regularity in rotating black holes [J]. Physical Review D, 2006, 74(4): 044017.

[8] 赵峥. 黑洞的热性质与时空奇异性:零曲面附近的量子效应 [M]. 北京：北京师范大学出版社，1999：176.

第2章 黑洞的微扰理论

2.1 微扰理论

根据广义相对论的预言，在浩瀚的宇宙中，应该有许多黑洞存在。然而，如何在宇宙中寻找到黑洞是所有天文观测者面临的一个巨大挑战。根据双星模型，人们只能间接地确定天鹅座 X-1 为黑洞的最强有力的候选者，然而它到底是不是黑洞，还有待进一步的确定。黑洞的无毛定理表明，黑洞的全部性质只由质量、电荷和角动量这三个参量来决定。可是，如何确定黑洞的这三个参量呢？如何从理论上给出对天文观测真正有用的数据，来用事实证明黑洞的存在呢？研究结果表明：黑洞时空中微扰场的似正规模携带有黑洞的特征信息，这意味着对似正规模的研究将为人们提供一种直接鉴定黑洞是否存在的方法。

另外，前面提到黑洞力学四定律在形式上与普通热力学四定律非常相似，所以，人们自然认为稳态和静态的黑洞处于所谓的热平衡状态。如果在黑洞背景时空加一个很小的扰动，黑洞还会回到平衡态而继续保持稳定吗？20 世纪 50 年代末期，Regge 和 Wheeler 采用线性微扰理论，对 Schwarzschild 黑洞时空进行了研究[1]，结果表明，正如热力学系统在经过一定时间达到热平衡状态一样，受到扰动后的黑洞最终也会趋于平衡态而保持稳定。随后，人们还对带电的 Reissner - Nordström 黑洞[2]和旋转的 Kerr 黑洞[3]进行研究，所得结论均表明，加给黑洞的各种微扰场在黑洞时空中会发生衰减行为并最终消失，黑洞最后将回到平衡态而保持稳定。

在广义相对论中，研究黑洞的微扰主要有两条途径：一种是度规微扰法，即对黑洞时空自身的扰动进行研究。黑洞时空自身的扰动如下：

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{background}} + h_{\mu\nu} \tag{2-1}$$

式中的 $g_{\mu\nu}^{\text{background}}$ 是黑洞背景时空的度规，$h_{\mu\nu}$ 是其微扰扰动。一般情况下，由

引力扰动所激发的引力辐射比黑洞外部场扰动激发的引力辐射要强得多，因此常常被用作判定黑洞稳定性的有效手段。另一种方法是假设在黑洞附近存在某一扰动物质场(包括各种自旋场，如标量场、Dirac 场、电磁场等)，通过分析微扰场在黑洞时空中的演化行为，可以探究黑洞的基本性质。

黑洞时空受到扰动时，与人们熟悉的水受到扰动会产生水波一样，也会在时空中产生涟漪，并且以波的形式向外传播。微扰场在黑洞时空中的演化过程通常被分为如下三个阶段：

第一阶段是初始的激发阶段，或者说是初始波爆发(the initial wave burst)阶段。这一阶段波场的频率是由微扰源本身的初始条件决定的。

第二阶段是衰减振荡阶段，也就是似正规模（the quasinormal modes）阶段。此时波的频率为复数且不依赖于微扰源的初始条件，仅与黑洞背景时空的参量有关系，这一阶段中引力波的衰减遵循指数衰减。

第三阶段是晚期的幂律拖尾（the late-time tail）阶段。研究结果表明，该阶段是由于微扰场在渐近无限远处的逆向散射引起的。此阶段微扰场的衰减形式不再遵循指数衰减，而是幂律衰减行为。该阶段也能给出时空参数的信息。

图 2-1 和图 2-2 清晰地描述了微扰场在黑洞时空中的演化过程，并且似正规模阶段在整个演化过程中占据主导地位。

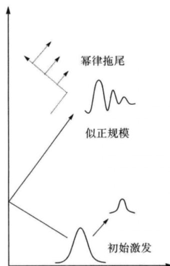


图 2-1 黑洞微扰理论研究对象示意图

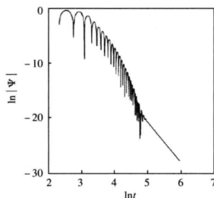


图 2-2 在对数坐标下，Schwarzschild 黑洞时空中高斯引力波包演化的似正规模和幂律拖尾阶段示意图[4]

2.2 似正规模的定义

大家知道，任何物体都有自己的特征频率，这也是人们能够轻易分辨出不同声音的原因。因此，时空背景的振荡也将导致黑洞具有自己的“特征声音”，而扰动场的似正规模恰好是这种“声音”的物理表述。

普通物体激发的声波是正规模，它的频率是实数，在没有阻力的情况下，声波将永远振荡下去，且任何一个波函数都可分解为一组正规模的叠加。黑洞作为一类特殊的天体，是一个具有强大引力的时空区域。有关研究结果表明，与普通物体的振荡相比，黑洞振荡的特征频率是一系列复数。由于黑洞时空与引力紧密联系，时空的扰动会产生引力波，随着引力波向远处传播，能量会有损失，因此，在渐近平直时空中，扰动场的特征频率是衰减的。另外，在黑洞这个耗散系统里，不能把耗散部分去掉，所以不能把一个波函数分解为一组正规模的叠加。

在讨论似正规模之前，先来了解一下什么是正规模。

对于一经典线性振荡系统，如琴弦，在忽略能量耗散的情况下，可以把波函数分解为

$$\Psi_n(t,\ x) = e^{i\omega_n t}\psi_n(x) \qquad (n=1,\ 2,\ 3\ ,\ \cdots) \tag{2-2}$$

式中的 $\Psi_n(t,\ x)$ 是复场，但 ω_n 是实的。

以一根长为 l，两端固定的弦为例，该弦自由振动满足的波动方程为

$$\frac{\partial^2\ \Psi(t,x)}{\partial t^2} = \Lambda\Psi(t,x) \tag{2-3}$$

利用分离变量法，可求得该方程的通解：

$$\Psi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} \psi_n(x) \tag{2-4}$$

式中的待定系数 a_n 由给定的边界条件和弦振动的初始条件来确定。方程(2-4)的解就是线性振荡系统的正规模。

对于黑洞这样一个耗散系统，其视界周围扰动场的振动方程不再用(2-3)式表示，而是通常写成如下二阶偏微分方程形式：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x)\right]\Psi(t,x) = 0 \tag{2-5}$$

式中的 x 为空间变量，它的变化范围为 $-\infty \sim +\infty$。若对应于黑洞时空，x 的变化范围为 $r_h < x < +\infty$，即在黑洞视界处 r_h，x 的取值相当于 $-\infty$。V 是依赖于 x 的势函数，相当于黑洞外部扰动场的一个势垒。

由于时间反演对称性，假设波函数：

$$\Psi(t,\ x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\Phi(x) \tag{2-6}$$

将(2-6)式代入(2-5)式中进行分离变量，可以得到扰动场满足的微分方程，式中的含空间变量 x 部分为

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + [\omega^2 - V(x)]\Phi(x) = 0 \tag{2-7}$$

可见，该方程在形式上与量子力学中描写粒子在一维无限空间中做势垒贯穿运动的薛定谔(Schrödinger)方程相似。

(2-6)式波函数并不是一个严格解，因为一旦得到扰动方程的一个解，就可以给出一个与时间相关的、连续的傅里叶变换形式的解。但是，因为与正规模的形式相类似，所以尽管不是一个严格解，方程(2-6)仍是研究似正规模很好的工具。

对于渐近平直时空，扰动场的势函数总为正数，并且将在无穷远的地方消失，即

$$V(x) \to 0 \quad (x \to -\infty) \tag{2-8}$$

$$V(x) \to 0 \quad (x \to +\infty) \tag{2-9}$$

显然，这种类型的势能不允许有束缚态存在。因此，方程的解不可能是正规模的展开形式。满足(2-8)式和(2-9)式条件的势函数在边界 $\pm\infty$ 附近，方程的解具有平面波的形式，即

$$\Phi(x) \sim \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega x} \quad (x \to -\infty) \tag{2-10}$$

$$\Phi(x) \sim \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega x} \quad (x \to +\infty) \tag{2-11}$$

一般来讲，在无穷远($x \to +\infty$)处，扰动方程的似正规模解为纯粹的出射

波；而在黑洞的视界($x \to -\infty$)附近，则为纯的入射波。即

$$\Phi(x) \sim e^{-i\omega x} \quad (x \to -\infty) \tag{2-12}$$

$$\Phi(x) \sim e^{+i\omega x} \quad (x \to +\infty) \tag{2-13}$$

这是由黑洞特殊的物理性质决定的，在视界处为纯的入射波意味着波在这里只进入黑洞。满足这些边界条件的频率 ω 是一些离散的复数，即 $\omega_{QN} = \omega_R + i\omega_I$，通常将这些复频率 ω_{QN} 称为似正规模频率，而具有这样频率的波函数叫作似正规模。似正规模频率的实部 ω_R 代表扰动场振荡的实际频率，虚部 ω_I 代表振荡的衰减快慢。由于虚部 ω_I 的出现，黑洞的似正规模不可能永远稳定地振荡下去。另外，ω_I 通常为负值，这意味着似正规模是随着时间做指数衰减的，并且在很晚的时候，指数衰减将转化成幂律衰减。这种现象既反映了时空具有稳定性，也表明波在黑洞时空的传播过程中伴随有能量的损耗。

但并不是所有的黑洞时空的势函数都具有(2-8)式和(2-9)式的形式。对于 Anti - de Sitter(AdS)时空，在空间无限远处，势函数满足

$$V(x) \to \infty \quad (x \to +\infty) \tag{2-14}$$

此时，方程的解是

$$\Phi(x) \to 0 \quad (x \to +\infty) \tag{2-15}$$

也并非所有的黑洞时空的势函数都是正数，在标量场扰动的情形下，会出现负势的情况，有可能导致时空的不稳定。

另外，似正规模频率与角量子数 l 和模量子数 n 密切相关，通常把具有相同角量子数且 $n=0$ 时的复频率称为基态频率；把模量子数较小 $n<l$ 的情况称为低频似正规模，此时的似正规模与黑洞的探测有密切关系；而 $n \gg l$ 的情况通常被称为快速衰减似正规模。研究结果表明，通过研究快速衰减似正规模，可以实现黑洞的量子化。

2.3 研究似正规模的意义

在一定程度上，黑洞是广义相对论中一类很“纯”的物体，只需要三个参量就可以清楚地描述它们。黑洞如此简单，与量子力学中的氢原子相似，只有三个经典自由度，因而被人们形象地形容为广义相对论中的氢原子。作为爱因斯坦场方程的解，黑洞的性质能够部分地反映出弯曲时空的许多性质，因此，对黑洞似正规模频率的研究显得尤为重要。

2.3.1 黑洞的参数估计

黑洞最初是在数学上作为广义相对论的一组静态解被发现的，那么，在

人们生存的宇宙中，是否真的有黑洞存在呢？尽管大部分理论物理学家都会相信一定有黑洞存在，但谁都不会理直气壮地告诉你他已经观测到了黑洞。黑洞，这一广义相对论预言的特殊天体，一直把自己隐藏得很神秘，以至再高倍的望远镜都无法“亲眼目睹”。幸运的是，广义相对论在预言了黑洞存在的同时，也预言了时空的扰动会产生引力波。大家知道，黑洞在本质上反映的正是时空本身的性质，所以，根据引力波的探测能够间接地确定黑洞是否存在。

引力波探测的先驱是20世纪60年代美国马里兰大学的约瑟夫·韦伯(Joseph Weber)。他制造了世界上最早的一种引力波探测仪器——一个棒状引力波探测器(称为韦伯棒)。1969年韦伯公布了他们研究小组的实验数据，并宣称探测到了引力波，但韦伯的实验结果始终未能被重复验证。1974年，马萨诸塞大学的罗素·胡尔斯(Russell Hulse)和约瑟夫·泰勒(Joseph Taylor)通过波多黎各的阿雷西博射电望远镜发现了脉冲星PSR 1913+16，并且在随后的天文观测中非常精确地探测到了引力波的间接影响。

由于引力波的强度很弱，而且物质对引力波的吸收率极低，直接探测到引力波是非常困难的，所以需要一个很强的引力波源才行。研究结果表明，人们已经获取了引力波存在的间接证据，像恒星的塌缩、黑洞的碰撞和星系核周围的超新星爆发[5,6]时，都会产生很强的时空振荡，计算机模拟显示，在这些过程的最后阶段，引力波是以似正规模和幂律拖尾的形式表现出来的。理论上，那些缓慢衰减的似正规模是可以被探测到的，如果加上高灵敏度的巨型探测器的帮助，直接捕捉到引力波应该是指日可待的。

正如前面所述，似正规模只与黑洞背景时空的参量有关，例如对静态球对称Schwarzschild黑洞，似正规模频率只与黑洞质量M有关，而旋转的Kerr黑洞的似正规模频率与黑洞质量M和角动量a有关。所以，可以根据扰动场的振动频率和衰减时间来精确地确定黑洞的参数。

假设引力波探测仪探测到某一黑洞的一个似正规模($l=n=2$)，那么它显示的将是一条随着时间做指数衰减的正弦曲线：

$$h(t)=V^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{-\pi f(t-T)}{Q}}\sin 2\pi f(t-T) \tag{2-16}$$

式中的V，T，Q，f为四个特征参量。$V^{-\frac{1}{3}}$为引力波的振幅，它与探测仪器到波源的距离、扰动的大小和探测仪与波源的相对角度均有关；T是微扰开始的时间；Q称为品质因子，满足$Q=\pi f\tau$，其中τ为衰减时间。Q和f都与似正规模频率的实部和虚部有关，可以近似地表示为

$$Q=\pi f\tau=2(1-a)^{-\frac{9}{20}} \tag{2-17}$$

$$f \sim \frac{1}{2\pi M}\left[1-\frac{63}{100}(1-a)^{\frac{3}{10}}\right] \tag{2-18}$$

可见，只要探测到似正规模的振动频率 ω_R 和衰减因子 ω_I，原则上就可以利用(2-16)式和(2-18)式来确定电中性的旋转黑洞的基本参量。

2.3.2 AdS/CFT 对应和灰体因子

自从爱因斯坦致力于追求建立统一场论开始，人们就梦想着有一天能够找到一个“终极理论”，用它统一解释现今自然界中的四种相互作用(强相互作用、弱相互作用、电磁相互作用和引力相互作用)。20 世纪 20—50 年代，出现了量子场论，该理论是将爱因斯坦的狭义相对论、麦克斯韦的电磁理论与量子力学结合起来的统一场论。它能够很好地处理电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用，但却不能处理引力相互作用。60—70 年代，弦理论的雏形诞生了。研究结果表明，所有的弦理论中都包含有质量为零、自旋为 2 的粒子，而具有这些特点的粒子之间的相互作用就是引力作用。所以，理论上所有的弦理论都能够处理引力作用。因此，可以说弦理论是迄今为止最有希望将自然界的基本粒子和四种相互作用统一起来的理论。

弦理论的一个基本观点是，自然界的基本单元不是电子、光子、中微子和夸克之类的“点”状粒子，而是很小很小的“线”状的“弦”(包括有端点的“开弦”和圈状的“闭弦”或闭合弦)。弦的不同振动和运动能够产生各种不同的基本粒子。弦理论中的弦尺度非常小，但操控它们性质的基本原理预言，存在几种尺度较大的薄膜状物体，简称为“膜”。直观地说，我们所处的宇宙空间可能是 9 + 1 维时空中的 D3 膜。

那么，黑洞的似正规模与弦理论之间有什么关系呢?

1974 年，'t Hooft 研究发现，$SU(N)$ 规范群中的 N 很大时，费曼(Feynman)图的主要项是那些可以画在球表面上并且任何两条线都不相交的平面图。因此，'t Hooft 大胆地推论：四维 $SU(N)$ 量子规范理论，即量子色动力学(Quantum Chromodynamics，QCD)等价于弦理论。量子色动力学是建立在规范群 $SU(3)$ 基础上的一种强相互作用的规范理论，它能够描述组成强作用粒子的夸克和与色量子数(内禀量子数) N 相联系的规范场的相互作用。QCD 是渐近自由的，这意味着随着能量的增加，有效耦合常数(决定弦与弦之间的相互作用强度)会减小。在低能条件下，由于耦合很强而很难进行计算。后来的研究结果表明，当色量子数 N 很大时，弦与弦之间的相互作用可以忽略，从而可以用规范理论来描述弦论。当 $N\to\infty$ 时的量子色动力学理论与弦耦合常数为 $1/N$ 的弦理论之间是一致的。这种对应就是人们常说的 AdS/CFT(Anti-

de Sitter/Conformal Field Theory)对应。AdS/CFT 对应表明了 d 维 AdS 时空中的物理信息完全可以由 $d-1$ 维的共形场论来描述[7]。也就是说，物理信息保存在 d 维 AdS 时空中的共形边界上。

由于弦理论能够处理引力相互作用，所以 AdS/CFT 对应表明引力理论与场论之间也存在一种对应。根据这种对应，静态大质量的 AdS 黑洞对应共形场论中的一种热力学平衡态，如果给该黑洞时空一个微扰，则相当于给平衡态一个微扰。微扰的衰减过程也是系统返回平衡态的过程。通常，在 CFT 中直接计算系统返回平衡态的时间标度是非常困难的，甚至是不可能的。但是，由于似正规模能够描述微扰的衰减，如果能够计算出 AdS 黑洞时空的似正规模频率，那么，就可以直接得到 CFT 中系统返回平衡态的时间标度。

另外，在弦理论中，黑洞的霍金辐射是通过所谓的 D 膜辐射来计算的，这个计算假定黑洞趋于临界黑洞时，除了标准黑体谱中应有的普朗克公式外，还有一个和吸收截面成正比的因子。这个因子的存在是因为被辐射出的无质量粒子要克服黑洞的引力，辐射谱破坏了标准的黑体谱，被称为“灰体因子”。在黑洞的半经典计算中，计算灰体因子比较复杂，而在 D 膜图像中，只需要计算两个开弦合并成一个闭弦的概率即可，计算相对简单，而且计算结果与半经典计算完全符合。可以说，弦理论中的 D 膜图像不但能给出霍金辐射的黑体谱，也能根据 AdS/CFT 对应给出与黑洞几何相关的灰体因子。此外，研究结果表明，快速衰减的似正规模在灰体因子的计算中也扮演着十分重要的角色。

2.3.3 黑洞视界面积量子化与 Hod 猜想

自 20 世纪 40 年代开始，人们就意识到有必要对引力进行量子化。几十年来，许多优秀的科学家一直致力于这一领域的研究，但迄今为止，完备的量子引力理论仍未建成。研究表明，黑洞在引力的量子化过程中扮演着非常重要的角色。

人们对黑洞量子化的研究最初是建立在非极端黑洞的视界面积是一个经典绝热不变量这一理论基础之上的。由埃伦费斯特(Ehrenfest)原理，任何经典绝热不变量都对应着有分立谱的量子体系。因此，贝肯斯坦猜想非极端黑洞的视界面积应该有一个分立的本征谱。以一个非极端黑洞为例，当它吸收一个有限大小的中性粒子后，将导致黑洞面积的增加，并且增加量至少为

$$(\Delta A)_{\min} = 8\pi l_p^2 \tag{2-19}$$

其中，$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$，称为普朗克长度。

同样，Hod 也发现，当黑洞吸收一个有限大小的带电粒子时，黑洞面积的增加量也有一个相似的下限：

$$(\Delta A)_{\min}=4l_{\mathrm{p}}^{2} \tag{2-20}$$

因此，人们猜测黑洞视界面积量子化的一般形式为

$$A_n=\gamma n l_{\mathrm{p}}^{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{2-21}$$

式中的 γ 是量纲为 1 的常数。

黑洞视界面积量子化表明，黑洞视界是由 n 个面积为 $\gamma l_{\mathrm{p}}^{2}$的碎片拼凑而成的。另外，认为这些碎片都是等同的，而无须考虑它们的形状和位置。这个拼凑的视界可以认为有很多的自由度，每一个碎片对应一个自由度。量子理论中各个自由度对应不同的状态。假设每一个碎片都有相同的量子态数 k，那么黑洞视界的总量子态数为

$$N=k^{\frac{A}{\gamma l_{\mathrm{p}}^{2}}} \tag{2-22}$$

因此，黑洞视界的波尔兹曼(Boltzmann)统计熵为

$$S=\lg N=\frac{A}{\gamma l_{\mathrm{p}}^{2}}\lg k \tag{2-23}$$

与黑洞的贝肯斯坦-霍金熵公式 $S=A/4$ 进行对比，可以发现：

$$\gamma=4\lg k \tag{2-24}$$

这是统计力学对 γ 的形式所做出的要求。然而，k 的值为多少一直不能确定。最近，Hod 从 Schwarzschild 黑洞时空中的快速衰减的似正规模出发，利用玻尔(Bohr)的对应原理，确定了 k 的值为 3。之后不久，Motl 和 Neizke 利用解析的方法求出了 Schwarzschild 黑洞时空中标量微扰场和引力微扰场的快速衰减的似正规模频率公式，发现结果正好满足 Hod 猜想。

那么，什么是 Hod 猜想[8]呢?

Nollert 利用数值计算方法发现 Schwarzschild 黑洞时空中标量场扰动的快速衰减的似正规模频率为

$$M\omega_n=0.0437123-\frac{\mathrm{i}}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)+O\left[(n+1)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (n\to\infty) \tag{2-25}$$

式中的 M 为黑洞的质量。显然，它与场的角量子数 l 没有关系。因此，快速衰减的似正规模只反映黑洞自身的特征。Hod 经过仔细研究后猜想，与快速衰减的似正规模频率的实部有关的 0.0437123 正好等于 $\ln 3/(8\pi)$。

另外，根据玻尔对应原理，在大量子数的情况下，系统的量子跃迁频率应该等于经典的谐振频率。Hod 认为，快速衰减的似正规模频率的虚部很大，说明黑洞返回静止状态的弛豫时间较短。又由量子力学可知，量子跃迁过程

是不需要时间的。因此，快速衰减的似正规模所对应的过程可以看作一种跃迁，似正规模频率的实部可被看作这一量子跃迁所辐射的频率。

当 Schwarzschild 黑洞向外辐射一个粒子时，黑洞的能量会发生变化，其改变量为 $\Delta M = E = \hbar\omega = \hbar \mathrm{Re}(\omega_n)$。另外，大家知道，Schwarzschild 黑洞的视界面积为 $A = 16\pi M^2$，根据黑洞热力学，有

$$\Delta A = 32\pi M\Delta M = 4\hbar \ln 3 \tag{2-26}$$

Dreyer 由此还确定了圈量子引力理论中的 Barbero - Immirzi 参数，$\gamma = 4\hbar\ln 3$。从而也可得出在圈量子引力理论中，基本的规范群应该为 $SO(3)$。

综上所述，人们希望能够通过对似正规模频率的研究，找到通往引力场量子化的途径。

2.4 研究方法

由前面的分析可知，黑洞的似正规模在黑洞物理学和天文学研究中都具有极其重要的作用。然而，求解黑洞时空中扰动场的似正规模并非易事。由于用解析的方法去求满足边界条件(2-12)式和(2-13)式的方程(2-7)的解非常困难，所以人们更多地求助于数值计算。虽然似正规模的虚部为负这一特点能够帮助人们在进行数值计算时对某些根进行取舍，但是，如何在得到的结果中鉴别出正确的似正规模仍然并不轻松，有时候这项工作还十分繁琐。自20世纪70年代开始至今，已经发展了许多行之有效的计算似正规模的方法，常用的主要有 WKB 近似法[9-11]、Pöshl - Teller 势近似法[12-14]、连续分数法[15]、有限差分法[16,17]和单值法[18]等。

2.4.1 WKB 近似法

WKB 近似法是由 Wenzell，Kramers 和 Brillouin 在同一时期分别提出的一种求解 Schrödinger 方程的半经典近似方法。在量子力学中，WKB 近似方法通常被用来处理粒子势垒贯穿问题。由于黑洞时空中微扰场的有效势相当于量子力学中一个有限高势垒，且微扰方程的形式与 Schrödinger 方程形式相似，所以，可以采用 WKB 近似法来估算黑洞时空的似正规模。

引入微扰参数 γ，黑洞时空中的各种微扰场满足的方程最终可以转化成如下形式：

$$\gamma^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + G(x)\psi(x) = 0 \tag{2-27}$$

其中，$G(x) = \omega^2 - V(x)$。

令波函数

$$\psi(x)=\exp\left[\frac{S(x)}{\gamma}\right] \tag{2-28}$$

并代入到（2-27）式中，可以得到关于 $S(x)$ 满足的方程：

$$S'^2(x)+\gamma S''(x)+G(x)=0 \tag{2-29}$$

在 WKB 近似法中，把 $S(x)$ 按 γ 做幂级数渐近展开，有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n S_n(x)=S_0(x)+\gamma S_1(x)+\gamma^2 S_2(x)+\cdots \tag{2-30}$$

把(2-30)式代入方程(2-29)中，展开并整理可得

$$S_0'^2+\gamma(S_0''+2S_0'S_1')+\gamma^2(S_1'^2+2S_0'S_2'+S_1'')+\cdots=-G(x) \tag{2-31}$$

在(2-31)式中，比较 γ 的同幂次项，就可以得到一些与该式等价的方程组：

$$S_0'^2+G(x)=0 \tag{2-32}$$

$$S_0''+2S_0'S_1'=0 \tag{2-33}$$

$$S_1''+2S_0'S_2'+S_1'^2=0 \tag{2-34}$$

………

对(2-32)式和(2-33)式两端进行积分，可以得到 $S(x)$ 的零级和一级近似解：

$$S_0(x)=\pm\mathrm{i}\int^x[G(\xi)]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi \tag{2-35}$$

$$S_1(x)=-\frac{1}{4}\ln G(x) \tag{2-36}$$

以此类推，可以求得更高阶的近似解，进而可以求得波函数 $\psi(x)$。

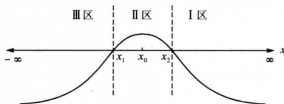


图 2-3　函数 $G(x)$ 的图像

函数 $G(x)$ 的图像如图 2-3 所示，在Ⅰ区，当 $x\to+\infty$ 时，有 $S_0(x)\to\pm\mathrm{i}\omega x$，正号表示朝向 $+\infty$ 的出射波，负号表示来自 $+\infty$ 的入射波。在Ⅲ区，当 $x\to-\infty$ 时，有 $S_0(x)\to\pm\mathrm{i}\tilde{k}x$，此时正号表示来自 $-\infty$ 的入射波，负号表示朝向 $-\infty$ 的出射波。因此，Ⅰ区和Ⅲ区中的通解分别为

$$\psi^{\mathrm{I}}\sim Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{I}}\psi_-^{\mathrm{I}}+Z_{\mathrm{out}}^{\mathrm{I}}\psi_+^{\mathrm{I}} \tag{2-37}$$

$$\psi^{\mathrm{III}} \sim Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{III}} \psi_{+}^{\mathrm{III}} + Z_{\mathrm{out}}^{\mathrm{III}} \psi_{-}^{\mathrm{III}} \tag{2-38}$$

假设 $Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{I}}$，$Z_{\mathrm{out}}^{\mathrm{I}}$和 $Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{III}}$，$Z_{\mathrm{out}}^{\mathrm{III}}$之间存在线性关系

$$\begin{bmatrix} Z_{\mathrm{out}}^{\mathrm{III}} \\ Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{\mathrm{out}}^{\mathrm{I}} \\ Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{I}} \end{bmatrix} \tag{2-39}$$

通过考查方程在Ⅱ区的解，可以确定上述线性方程的系数。一般来说，在拐点附近，WKB 的近似解是失效的，所以，需要通过在拐点邻域内找到方程的严格解，然后确定在离拐点较远处的渐近行为，让它与 WKB 的近似解衔接起来，进而确定所需要的系数。

由于黑洞似正规模问题并不完全等同于量子力学中的势垒贯穿问题，所以在处理似正规模问题时，标准的 WKB 衔接就会失效。在黑洞的似正规模问题中，边界条件不同将导致反射波和透射波的幅度在同一数量级上，不满足量子力学中反射系数很大而透射系数很小这一条件。所以，需要对标准的 WKB 衔接做一些简单的改进，即在Ⅱ区将 $-G(x)$ 做二阶泰勒级数展开，然后把Ⅱ区求得的解做渐近近似，再与两个区域的 WKB 解衔接，利用边界条件，求出似正规模的频率。

下面对上述过程做简要的说明。

以 x_0（对应有效势取最大值的位置）为中心，将 $-G(x)$ 做泰勒级数展开，并取前两阶：

$$G(x) = G_0 + \frac{1}{2} G_0'' (x - x_0)^2 \tag{2-40}$$

令 $z = x - x_0$，$k = \frac{1}{2} G_0''$，$z_0^2 = \frac{-2G_0}{G_0''}$，则微扰方程(2-27)可改写为

$$\gamma^2 \frac{\mathrm{d}^2 \psi}{\mathrm{d}z^2} + k(-z_0^2 + z^2)\psi = 0 \tag{2-41}$$

在Ⅱ区内，有 $|z| < z_0 \approx \gamma^{\frac{1}{2}}$。

为了找到Ⅱ区内解的渐近形式，定义一个新的变量 t，满足

$$t = (4k)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{4}} \frac{z}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \tag{2-42}$$

并且令

$$v + \frac{1}{2} = -\mathrm{i} \frac{k^{\frac{1}{2}} z_0^2}{2\gamma} \tag{2-43}$$

则方程(2-41)可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \psi}{\mathrm{d}z^2} + \left(v + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2\right)\psi = 0 \tag{2-44}$$

求出方程(2-44)的解，然后给出 S_0和 S_1在 $z=\pm z_0$附近的表达式，最终得到：

$$\begin{bmatrix} Z_{\text{out}}^{\text{III}} \\ Z_{\text{in}}^{\text{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\pi\nu} & \dfrac{iR^2 e^{i\pi\nu}(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(1+\nu)} \\ \dfrac{R^{-2}(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)} & e^{-i\pi\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{\text{out}}^{\text{I}} \\ Z_{\text{in}}^{\text{I}} \end{bmatrix} \tag{2-45}$$

对于量子力学中粒子穿透势垒的行为，$G(x)$为实数，$\nu+\dfrac{1}{2}$为复数。如果粒子从 I 区穿过势垒到达 III 区，此时边界条件为 $Z_{\text{in}}^{\text{III}}=0$。透射系数和反射系数分别为

$$T=\left[1+e^{2\pi i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right]^{-1},\ R=\left[1+e^{-2\pi i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right]^{-1} \tag{2-46}$$

对于黑洞时空的似正规模，由于在黑洞视界处为纯的入射波，在无穷远处为纯的出射波，所以边界条件可写为 $Z_{\text{in}}^{\text{III}}=0$ 和 $Z_{\text{in}}^{\text{I}}=0$。只有当 $\Gamma(-V)=\infty$，即 ν 为非负整数时，上述边界条件才能满足。因此，(2-43)式可写成

$$n+\frac{1}{2}=-i\,\frac{k^{\frac{1}{2}}z_0^2}{2\gamma}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2-47}$$

令 $\gamma=1$，则黑洞时空中的似正规模频率公式为

$$\omega^2=V_0-i\left(n+\frac{1}{2}\right)(-2V_0'')^{\frac{1}{2}} \tag{2-48}$$

以上是一阶 WKB 近似的复频率计算公式[9]。该方法的计算结果精度较低。为了提高结果的精度，Iyer 和 Will 把该方法发展到三阶，并且利用三阶 WKB 近似成功地计算出了 Schwarzschild 黑洞的似正规模频率[10,11]。在三阶 WKB 近似法中，计算黑洞似正规模频率的公式为

$$\omega^2=\left[V_0+(-2V_0'')^{\frac{1}{2}}\tilde{\Lambda}(n)\right]-i\left(n+\frac{1}{2}\right)(-2V_0'')^{\frac{1}{2}}[1+\tilde{\Omega}(n)] \tag{2-49}$$

其中，

$$\tilde{\Lambda}(n)=\frac{1}{(-2V_0'')^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{8}\left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0''}\right]\left(\frac{1}{4}+\alpha^2\right)-\frac{1}{288}\left[\frac{V_0^{(3)}}{V_0''}\right]^2(7+60\alpha^2)\right\} \tag{2-50}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(n)=\frac{1}{-2V_0''}\Bigg\{&\frac{5}{6912}\left(\frac{V_0'''}{V_0''}\right)^4(77+188\alpha^2)-\frac{1}{384}\left[\frac{V_0'''^2V_0^{(4)}}{V_0''^3}\right](51+100\alpha^2)+\\&\frac{1}{2304}\left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0''}\right]^2(67+68\alpha^2)+\frac{1}{288}\left[\frac{V_0^{(5)}V_0'''}{V_0''^2}\right](19+28\alpha^2)-\\&\frac{1}{288}\left[\frac{V_0^{(6)}}{V_0''}\right](5+4\alpha^2)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2-51}$$

这里参数 α 满足 $\alpha \equiv n+\frac{1}{2}$，模量子数 $n=0$，1，2，…。上标中括号里的数字代表势函数对乌龟坐标 r_* 进行微分的次数，而变量的下标 0 则代表在势能取极值处，也就是在 $r_* = r_*(r_p)(V_0'' \neq 0)$ 时的函数值，即

$$V_0^{(n)} = \left.\frac{\mathrm{d}^n V}{\mathrm{d} r_*^n}\right|_{r_* = r_*(r_p)}$$

可见，当势函数 $V(x)$ 已知时，运用上面的公式，很容易得到某一模量子数相对应的复频率。

2.4.2 Pöshl - Teller 势近似法

Pöshl - Teller 势近似法是采用 Pöshl - Teller 势的倒置势的束缚态近似黑洞时空中扰动场的有效势来求解似正规模的方法。

研究结果表明，黑洞时空中微扰场的有效势可能为一势垒或势阱。从量子力学观点来看，当一束入射波经过势垒时，一部分波会被反射回去，另一部分波会透射过去。对于频率为任一实数的波而言，它的反射系数 R 是有限的。如果把这个问题延拓到复数域，会发现，似正规模对应反射系数的奇点，而且这些奇点以虚轴为对称轴，均匀分布在复平面上。然而，若有效势为势阱，则反射系数的奇点对应这一势阱的束缚态。研究发现，有效势为势垒时，黑洞时空中微扰场的似正规模 Pöshl - Teller 势的倒置势的束缚态之间有一种对应，所以可以通过 Pöshl - Teller 势求解微扰场的似正规模。

Pöshl - Teller 势为

$$V_{\mathrm{PT}} = \frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\,\alpha(x-x_0)} \tag{2-52}$$

其中，$\alpha^2 = -\frac{1}{2V_0}\left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$，$V_0 = V|_{x=x_0}$ 是势垒的峰值，x_0 是势垒取得峰值所在的位置。

首次把 Pöshl - Teller 势近似法应用到黑洞似正规模的研究中来的是 Ferrari 和 Mashhoon[12,13]，他们利用该方法得到了黑洞时空的似正规模频率：

$$\omega_n = \sqrt{V_0 - \frac{\alpha^2}{4}} - \mathrm{i}\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2-53}$$

很显然，用 Pöshl - Teller 势近似法求似正规模的关键是找出有效势的最大值 V_0，以及它在峰值位置时对 x 的二阶导数。然后，可以利用(2-53)式计算出黑洞的似正规模频率。由此可见，当有效势的形状与 Pöshl - Teller 势的吻合程度较高时，所计算的似正规模频率的精度就越高。有关研究表明，

Pöshl－Teller 势近似法与三阶 WKB 近似法计算的结果吻合得较好。这种方法的优点是计算简单，缺点是适用性有限，因为并不是所有黑洞时空的微扰场的有效势都能和 Pöshl-Teller 势吻合得很好。

2.4.3 连续分数法

尽管 WKB 近似法和 Pöshl－Teller 势近似法都能够给出黑洞的似正规模频率，但它们的计算精度并不是很高。后来，E. V. Leaver 把最初用于确定氢离子能谱的连续分数法推广用来求解黑洞的似正规模频率[14]。下面以四维 Schwarzschild 黑洞时空为例来介绍这种数值计算方法，度规线元为(1-5)式。

如果把波函数 $\psi(t, r, \theta, \varphi)$ 进行傅里叶分解，并展开成球谐形式：

$$\psi(t, r, \theta, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big[\sum_{l}\frac{1}{r}\psi_l(r,\omega)Y_{lm}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\omega\Big] \tag{2-54}$$

那么，在 Schwarzschild 黑洞时空中，微扰场演化满足的径向方程可写成

$$r(r-1)\frac{\mathrm{d}^2\psi_l}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}\psi_l}{\mathrm{d}r}+\Big[\frac{\omega^2 r^3}{r-1}-l(l+1)+\frac{\sigma}{r}\Big]\psi_1=0 \tag{2-55}$$

其中，$\sigma=s^2-1$，s 是物质场的自旋，当 $s=0$，±1，±2 时，分别表示微扰场为标量场、电磁场和引力场。

从(2-55)式可以看出，它有两个规则奇点 $r=0$(位于原点)和黑洞视界 $r=1$(位于黑洞视界)，还有一个不规则奇点在 $r\to\infty$ 处。若引入新的变量 ρ，满足 $\rho=-\mathrm{i}\omega$，则方程(2-55)可以改写为

$$r(r-1)\frac{\mathrm{d}^2\psi_l}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}\psi_l}{\mathrm{d}r}-\Big[\frac{\rho^2 r^3}{r-1}+l(l+1)-\frac{\sigma}{r}\Big]\psi_1=0 \tag{2-56}$$

该方程的边界条件为

$$\psi_l\xrightarrow{r\to1}(r-1)^{\rho},\quad \psi_l\xrightarrow{r\to\infty}r^{-\rho}\,\mathrm{e}^{-\rho r} \tag{2-57}$$

下面，构造满足视界处边界条件的波函数的级数解：

$$\psi_l=(r-1)^{\rho}r^{-2\rho}\mathrm{e}^{-\rho(r-1)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Big(\frac{r-1}{r}\Big)^n\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{2-58}$$

其中，展开系数 a_n 可由下面的递推关系确定：

$$a_0=1 \tag{2-59}$$

$$\alpha_0 a_1+\beta_0 a_0=0 \tag{2-60}$$

$$\alpha_n a_{n+1}+\beta_n a_n+\gamma_n a_{n-1}=0\quad(n>0) \tag{2-61}$$

且递推系数 α_n，β_n 和 γ_n 分别满足

$$\alpha_n=n^2+2(\rho+1)n+2\rho+1 \tag{2-62}$$

$$\beta_n = -[2n^2 + (8\rho + 2)n + 8\rho^2 + 4\rho + l(l+1) - \sigma] \tag{2-63}$$

$$\gamma_n = n^2 + 4\rho(n+\rho) + \sigma + 1 \tag{2-64}$$

只要似正规模频率 $\omega = \omega_n$ 的值能够保证级数解(2-58)式收敛，即无穷级数的和存在且有限，那么无穷远处的边界条件(2-57)式就能得以满足。Baber 和 Hassé 研究了展开系数 α_n 在 $n \to \infty$ 时的渐近行为：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \pm \frac{(2\rho)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\rho^{-\frac{3}{4}}}{n} + \cdots \tag{2-65}$$

并且发现，只要(2-65)式取负号，级数解(2-58)就一定收敛，且此时本征值 ρ 恰好对应似正规模的频率。由(2-61)式，可以得到 α_n 相邻两项的比值是一个无穷连续分数：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\cfrac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \cfrac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \cfrac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} - \cdots}}} \tag{2-66}$$

(2-66)式通常也用如下的记号表示：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1}-}\,\frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2}-}\,\frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3}-}\cdots \tag{2-67}$$

(2-67)式可以看成是在当 $n \to \infty$ 时 α_n 的边界条件。可见，当 $n = 0$ 时，有

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{\gamma_1}{\beta_1-}\,\frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2-}\,\frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3-}\cdots \tag{2-68}$$

又由方程(2-60)，即 $\frac{a_1}{a_0} = \frac{-\beta_0}{\alpha_0}$，可以得到一个隐含似正规模频率的特征方程：

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_1-}\,\frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2-}\,\frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3-}\cdots \tag{2-69}$$

由 $\rho = -\mathrm{i}\omega$ 可知(2-69)式中 α_n，β_n 和 γ_n 均是频率的显函数，且由(2-62)至(2-64)式给出。所以，通过对连续分数方程(2-69)的求解，可以得到所求黑洞时空中的似正规模频率。上述方程的计算过程可通过计算机编程来完成。

连续分数法在推导过程中没有做任何近似处理，所以该方法能够非常精确地计算出黑洞的似正规模频率，这就是很多研究者在利用其他方法计算出似正规模后，要用连续分数法来进行验证的原因。另外，Leaver 的连续分数法是目前为止唯一的能够用来计算旋转黑洞似正规模的方法。

2.4.4 有限差分法

有限差分法是计算机数值模拟最早采用的方法[16,17]。该方法的基本思想

是将连续的定解区域用有限个由离散点构成的网格来代替，这些离散点称为网格的节点。用泰勒级数展开等方法，将连续定解区域上连续变量的函数用网格上定义的离散变量函数来近似，把原方程和定解条件中的微商用差商来代替，积分用积分和来近似。这是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法，在许多领域都得到了应用。

下面仍然以最简单的 Schwarzschild 黑洞时空的标量扰动为例，介绍有限差分法。

弯曲时空中无质量标量场的扰动方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)\psi=0 \tag{2-70}$$

令波函数

$$\psi(t,r,\theta,\varphi)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-m\varphi)}R(r)S(\theta)}{r}$$

且采用乌龟坐标 $\mathrm{d}r_*=\frac{\mathrm{d}r}{f}$，则扰动方程的径向部分为

$$\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r_*^2}+[\omega^2-V(r)]R(r)=0 \tag{2-71}$$

其中,有效势为

$$V(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2M}{r(r-2M)}\right] \tag{2-72}$$

引入一组零坐标 $u=t-r_*$，$v=t+r_*$，则方程(2-71)可化为

$$\frac{\partial^2R(u,v)}{\partial u\partial v}+\frac{V(r)}{4}R(u,v)=0 \tag{2-73}$$

(2-73)式就是将要进行离散分析的微分方程。记 $\psi(u,v)\rightarrow\psi_{i,j}$，可得

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\longrightarrow\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{\Delta u} \tag{2-74}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}\longrightarrow\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{\Delta v} \tag{2-75}$$

(2-73)式离散后的最终表示形式为

$$\psi_{\mathrm{N}}=\psi_{\mathrm{W}}+\psi_{\mathrm{E}}-\psi_{\mathrm{S}}-\Delta u\Delta vV(r)\frac{\psi_{\mathrm{W}}+\psi_{\mathrm{E}}}{8} \tag{2-76}$$

这里采用的记号分别表示为 $\psi_{\mathrm{N}}\rightarrow\psi_{i+1,j+1}$，$\psi_{\mathrm{W}}\rightarrow\psi_{i-1,j+1}$，$\psi_{\mathrm{S}}\rightarrow\psi_{i-1,j-1}$，$\psi_{\mathrm{E}}\rightarrow\psi_{i+1,j-1}$。

中心差分规则为

$$\psi_{i,j} = \frac{\psi_{\mathrm{W}} + \psi_{\mathrm{E}}}{2} \tag{2-77}$$

有限差分法既适用于渐近平直时空，也适用于 AdS 时空中似正规模的研究。可以通过合理的差分方式得到离散式，进而得到波形图。因此，它既能用来分析似正规模，也可以用于研究微扰场的晚期拖尾。关键是差分过程有可能导致计算误差和波形不稳定。

2.4.5　单值法

前面介绍的四种求黑洞时空似正规模的方法，只适用于缓慢衰减(n 较小)的似正规模频率。虽然连续分数法在理论上可以计算 $n \to \infty$ 的情形，但在实际计算过程中，当 $n = 20 \sim 50$ 时，计算机的运行就已经非常缓慢了。因此，人们希望找到一种能够计算快速衰减(n 很大)似正规模频率的方法。另外，Hod 猜想是建立在一个假设之上的，即快速衰减似正规模频率的实部为$\frac{\ln 3}{8\pi}$。能否用解析方法把它推导出来，关系到 Barbero - Immiriz 参数的确定，也关系到快速衰减似正规模是否真的与量子引力有关。正是在此背景下，Motl 和 Andersson 等人提出了一种能够直接计算静态黑洞时空中快速衰减似正规模频率的方法[15,18]，即单值法。该方法不需用计算机进行烦琐的数值计算，就能够给出快速衰减似正规模频率的解析表达式。下面，仍以 Schwarzschild 黑洞为例，简要介绍单值法。

在四维 Schwarzschild 黑洞时空((1-5)式)中，微扰场演化满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(r)}{\mathrm{d}x^2} + [\omega^2 - V(r)]\psi(r) = 0 \tag{2-78}$$

其中，$x = r + \frac{1}{2\kappa}\ln(r - 2M)$，$\kappa$ 是黑洞视界的表面引力。有效势为

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2(1-s^2)M}{r^3}\right] \tag{2-79}$$

式中的 s 是微扰场的自旋，当 $s = 0, 1, 2, \frac{1}{2}$时，分别代表微扰场为标量场、电磁场、引力场和 Dirac 场。

在用单值法讨论 Schwarzschild 黑洞似正规模过程中，要把研究区域解析延拓到 r 的整个复平面，而不是通常方法所研究的区域 $2M \leqslant r < \infty$。显然，在整个复平面上，波动方程(2-78)有两个规则奇点 $r = 0$ 和 $r = 2M$，以及一个不规则奇点 $r \to \infty$。因此，为了避免波动方程的解在绕 r 的复平面上出现多值，需要在 $r = 0$ 和 $r = 2M$ 之间引入一条截线，并且要求波函数除了在截线之外，

都满足波动方程。然后选择一个围道，通过比较波函数绕围道的整体单值性和局部单值性，来给出快速衰减的似正规模的频率公式。

在选择围道前，必须找到似正规模在复平面上满足的边界条件。大家知道，在区域 $2M \leqslant r < \infty$ 中，似正规模满足如下边界条件：

$$\psi(r) \sim e^{-i\omega x} \quad (x \to +\infty) \tag{2-80}$$

$$\psi(r) \sim e^{i\omega x} \quad (x \to -\infty) \tag{2-81}$$

在这里，假设复频率的虚部大于零，即 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$。

在复平面上，黑洞视界附近波函数可写为 $e^{\pm i\omega x}$，而且要求波函数沿逆时针方向绕奇点 $r = 2M$ 一周具有单值 $e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}}$。因此，在边界视界处波函数满足的边界条件仍是(2-81)式。在视界 $r \to \infty$ 处，须通过一个"Wick 旋转"把波函数解析延拓到曲线 $\mathrm{Im}(\omega x) = 0$ 上。由于快速衰减的似正规模频率 ω 的实部太小，所以它可以近似看作一个纯虚数，曲线 $\mathrm{Im}(\omega x) = 0$ 与曲线 $\mathrm{Re}(x) = 0$ 基本重合，因此，在无穷远处，波函数满足的边界条件为

$$\psi(r) \sim e^{-i\omega x} \quad (\omega x \to +\infty) \tag{2-82}$$

现在，通过曲线 $\mathrm{Re}(x) = 0$ 的形状来选择正确的围道。在四维 Schwarzschild 黑洞背景时空中，曲线 $\mathrm{Re}(x) = 0$ 和所选的围道 L 如图 2-4 所示，阴影部分为 $\mathrm{Re}(x) < 0$。

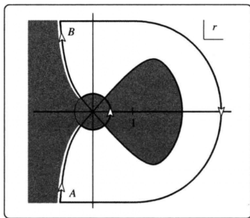


图 2-4 四维 Schwarzschild 黑洞时空中 $\mathrm{Re}(x) = 0$ 曲线的形状和所选的围道 L

比较局部单值性和整体单值性，可以得到四维 Schwarzschild 黑洞时空中各类微扰场的快速衰减似正规模的频率公式：

$$e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} = -[1 + 2\cos(\pi s)] \tag{2-83}$$

即

$$\frac{2\pi\omega}{\kappa}=\ln[1+2\cos(\pi s)]\pm i(2n+1)\pi \quad (n\to\infty) \tag{2-84}$$

显然，当 $s=0$ 或 2 时，标量扰动场或引力扰动场的快速衰减似正规模频率与 Hod 猜想完全一致。这一结论从理论上部分证明了 Hod 猜想。

本章参考文献

[1] Regge T, Wheeler J A. Stability of a Schwarzschild singularity [J]. Physical Review, 1957, 108(4): 1063.

[2] Zerilli F J. Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner - Nordström geometry [J]. Physical Review D, 1974, 9(4): 860.

[3] Teukolsky S. Rotating black holes-separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations [J]. Physical Review Letter, 1972, 29(16): 1114.

[4] 王永久. 经典黑洞和量子黑洞 [M]. 北京: 科学出版社, 2008: 200.

[5] Anninos P, Hobill D, Seidel E, et al. Collision of two black holes [J]. Physical Review Letters, 1993, 71(18): 2851.

[6] Gleiser R J, Nicasio C O, Price H, et al. Colliding black holes: how far can the close approximation go? [J]. Physical Review Letters, 1996, 77(22): 4483.

[7] Maldacena J. The large *N* limit of superconformal field theories and supergravity [J]. Advances in Theoretical Mathematical Physics, 1999, 38(4): 1113.

[8] Hod S. Bohr's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes [J]. Physical Review Letters, 1998, 81(20): 4293.

[9] Schutz B, Will C. Black hole normal modes—a semianalytic approach [J]. Astrophysical Journal, 1985, 291(4): L33.

[10] Iyer S, Will C M. Black-hole normal modes: a WKB approach Ⅰ foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering [J]. Physical Review D, 1987, 35(12): 3621.

[11] Iyer S, Will C M. Black-hole normal modes: a WKB approach Ⅱ Schwzchild black holes [J]. Physical Review D, 1987, 35(12): 3632.

[12] Ferrari V, Mashhoon B. Oscillations of a black hole [J]. Physical Re-

view Letters, 1984, 52(16): 1361.

[13] Ferrari V, Mashhoon B. New approach to the quasinormal modes of a black hole [J]. Physical Review D, 1984, 30(2): 295.

[14] Leaver E. An analytic representation for quasi-normal modes of Kerr black holes[J]. Proceedings of the Royal Society London A 1985,402(1823): 285.

[15] Motl L. An analytical computation of asymptotic Schwarzchild quasinormal frequencies [J]. Advances in Theoretical Mathematical Physics, 2003, 6(1): 1135.

[16] Gundlach C, Price R H, Pullin J. Late-time behavior of stellar collapse and explosions Ⅰ linearized perturbations [J]. Physical Review D ,1994, 49(2): 883.

[17] Gundlach C, Price R H, Pullin J. Late-time behavior of stellar collapse and explosions Ⅱ nonlinear evolution [J]. Physical Review D,1994, 49 (2): 890.

[18] Motl L, Neitzke A. Asymptotic black hole quasinormal frequencies [J]. Advances in Theoretical Mathematical Physics, 2003, 7(2): 307.

第 3 章　Quintessence 暗能量包围黑洞的低频似正规模

3.1　宇宙学模型

宇宙是指自然界中一切物质的总和，它是自然科学的最大客体。地球在整个宇宙中只是一个十分渺小的局部，在地球上的物体根本无法体现宇宙学的意义。因此，在理论研究方面，人们总是建立一些相应的模型，而这些模型的主要行为是与宇宙客体一致或相近的，通过对模型的深入讨论，反映宇宙这一客体的本质特征。

3.1.1　标准宇宙学模型

随着天文观测技术的发展，人们了解到，偌大的银河系只是天空中许许多多星系中的普通一员，而星系与星系还可以结合成尺度约为一千万光年的星系团，所以，宇宙在小尺度上是不均匀的、结团的。但是，这种不均匀性将会随着尺度的增大而变得越来越小。如果许多星系团组成尺度约为一亿光年甚至更大的超星系团，那么宇宙中的物质就可以看成是均匀分布的了。在宇宙学中，有一个基本假设：在大尺度结构上，宇宙在任何时刻都是均匀且各向同性的，这就是宇宙学原理[1]。随着广义相对论的建立并不断完善，经典标准宇宙学模型(热大爆炸宇宙学模型)被提出。这个模型认为：最初的宇宙是一个奇点，而现在的宇宙时空恰是从原初的奇点爆炸而来的。这个模型预言了宇宙是膨胀的。

宇宙的时空度规是由物质决定的，而宇宙学原理保证了物质在三维空间上是均匀各向同性分布的。由广义相对论[2]可知，这样的时空结构可以由下面的度规场来描述：

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \tag{3-1}$$

这就是著名的 Robertson - Walker(R - W)度规。这里采用的空间坐标 r, θ, φ 是共动坐标(comoving coordinate)，即宇宙中的每一个质元随着宇宙膨胀而动时，它的空间坐标是不变的。t 是宇宙时，是共动坐标系中任一质元上的静止时钟的走时。$a(t)$称为尺度因子，它随着时间的任意变化反映宇宙的演化进程。κ 是三维空间的曲率因子，当 $\kappa = +1$，0 和 -1 时，分别对应闭合、平直和开放的宇宙。当今的宇宙观测数据表明：宇宙是近似平直($\kappa \approx 0$)的[3]。平直宇宙的时空度规可以简化为

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \tag{3-2}$$

虽然宇宙是没有中心的，但是，以宇宙中任意一点为原点，均匀各向同性的宇宙时空结构都可以用 R - W 度规来描述。

下面将由爱因斯坦场方程和 R - W 度规给出宇宙尺度因子 $a(t)$满足的动力学方程。

爱因斯坦场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3-3}$$

其中，G 是牛顿引力常数，R 是里奇标量(Ricci Scalar)，$R_{\mu\nu}$是里奇张量(Ricci Tensor)，$T_{\mu\nu}$是宇宙中不同组分的总能量动量张量。由度规的对称性可知，$T_{\mu\nu}$是对角的，又由宇宙空间的各向同性可以推断空间上的三个分量相等。能够实现这样的能量动量张量最简单的模型就是理想流体。如果用$\rho(t)$来代表理想流体的能量密度，$p(t)$代表压强，则其能量动量张量的形式可表示为

$$T^{\mu}_{\nu} = \mathrm{diag}(\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t)) \tag{3-4}$$

方程(3-3)中非零的 $R_{\mu\nu}$可由 R - W 度规给出：

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} \tag{3-5}$$

$$R_{ij} = -g_{ij}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2}\right) \tag{3-6}$$

而 R 可以表示为

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right) \tag{3-7}$$

其中“ ˙ ”表示 $a(t)$对时间 t 的导数，“¨”代表二阶导数。

把方程(3-4)至方程(3-7)代入到方程(3-3)中，可以得到爱因斯坦场方程的 0 - 0 分量——弗雷德曼(Friedmann)方程：

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\kappa}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho \tag{3-8}$$

和 $i-i$ 分量:

$$2\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\kappa}{a^2}=-8\pi Gp \tag{3-9}$$

其中，$\frac{\dot{a}}{a}\equiv H(t)$，是依赖于时间的哈勃(Hubble)参数 。

利用方程(3-8)和方程(3-9)，可以给出尺度因子 $a(t)$ 满足的动力学方程:

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p) \tag{3-10}$$

至此，如果宇宙中流体的成分能够确定，就可以利用 Friedmann 方程完全确定尺度因子 $a(t)$ 的演化行为，进而确定宇宙演化的各个阶段。图 3-1 给出了宇宙演化的过程。

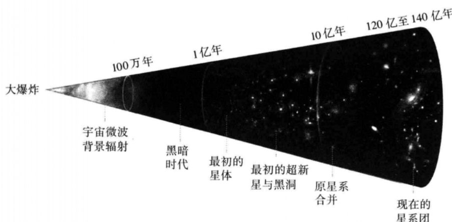


图 3-1 宇宙演化的各阶段

标准宇宙学模型的建立得到了大量天文实验观测的支持，并取得了巨大的成功。1929 年，哈勃通过天文观测数据，总结出一条规律，即星系远离地球的速度同它们与地球之间的距离刚好成正比，这就是哈勃定律。根据宇宙学原理，当观测空间足够大时，没有特殊的方向和特殊的点，因此哈勃定律表明了宇宙在膨胀。20 世纪 40 年代的原初核理论也验证了标准宇宙学模型。在宇宙最初发生大爆炸的那一时刻，宇宙处于一个极密、极高温的状态，之后宇宙逐渐膨胀、冷却演化至今，宇宙中物质 D, ^{3}He, ^{4}He, ^{7}Li 的丰度理论预言值与当今的天文观测数据相吻合。随着天文观测精度的提高，对高红移 Ia 型超新星的精确观测[4-6]、对宇宙微波背景辐射(Cosmic Microwave Back-

ground Radiation)和大尺度结构[7](Large-scale Structure)的研究，人们慢慢地发现宇宙的膨胀是加速进行的。宇宙加速膨胀这一现象的发现对标准宇宙学模型提出了挑战。

3.1.2 暗能量

随着科学的发展，宇宙加速膨胀这一现象已经得到了证实[8-10]。但是，从爱因斯坦场方程可知，通常的物质都是使宇宙减速膨胀的，那么，究竟是什么样的神秘力量在驱动宇宙进行加速膨胀呢？这种膨胀是从宇宙诞生之后一直加速，还是随着宇宙的演化慢慢地开始加速呢？在标准宇宙学模型的理论框架下，暗能量的出现使这些问题一一得以解决。

由协变的能量动量守恒方程 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$，可以得到 $\mu=0$ 分量的方程：

$$\dot{\rho}+3H(\rho+p)=0 \tag{3-11}$$

该方程也被称为连续性方程。

假设宇宙中充斥的物质都是理想流体，其物态方程可以定义为 $w=p/\rho$ (其中 w 是不依赖于时间的常数，p 是流体压力，ρ 是流体密度)。这样，宇宙加速膨胀的动力学方程(3-10)可改写为

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(1+3w) \tag{3-12}$$

对方程(3-11)两端取积分，并考虑 Friedmann 方程，可以得到理想流体的能量密度和尺度因子的演化行为：

$$\rho(t)\propto a^{-3(1+w)} \tag{3-13}$$

$$a(t)\propto t^{\frac{2}{3(1+w)}} \tag{3-14}$$

从(3-13)式和 (3-14)式可以看出 $w\neq 1$；如果宇宙中物质以辐射($w=1/3$)为主时，有 $\rho(t)\propto a^{-4}(t)$ 式和 $a(t)\propto t^{\frac{1}{2}}$；而对于压强可以忽略不计的非相对论物质($w=0$)，有 $\rho(t)\propto a^{-3}(t)$ 和 $a(t)\propto t^{\frac{2}{3}}$。可见，在 $t\sim 10^{12}$ 秒时，宇宙的组成成分由辐射过渡到物质。

但是，由方程(3-10)可以知道，在标准宇宙学模型的理论框架下，宇宙的加速膨胀必须满足 $\ddot{a}(t)>0$，即

$$\rho+3p<0 \tag{3-15}$$

也就是物态方程参数应该是

$$w<-\frac{1}{3} \tag{3-16}$$

可见，无论是以物质为主还是以辐射为主的宇宙模型，都不能加速膨胀。

1998 年，对 Ia 型高红移超新星的精确观测表明，该超新星诞生于距今大约 113 亿年以前，当时的宇宙处于减速膨胀阶段，而现今的宇宙观测数据表明，宇宙是加速膨胀的。这说明：自宇宙创生之日起，其膨胀性质是从减速变为加速的[11]。如果标准宇宙学模型是正确的，那么宇宙中必然存在一股额外的能量，以提供宇宙加速膨胀的原动力。这种奇异的能量满足物态方程((3-16)式)，并且是均匀地分布在宇宙空间中的一种具有负压强性质的特殊物质，这种物质被称为“暗能量”[12]。天文观测数据表明，暗能量占今天宇宙总能量的 72% 左右，毫无疑问，它的本质将决定宇宙空间的演化方式及命运。

1917 年，爱因斯坦为了建立一个静态的宇宙模型而引入了一个参数 Λ，即宇宙学常数，它是最简单的暗能量模型。带有宇宙学常数的爱因斯坦场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{3-17}$$

对于均匀各向同性的 Friedmann - Robertson - Walker(FRW)宇宙，利用(3-17)式和方程(3-1)，可以得到 Friedmann 方程：

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} \tag{3-18}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{3-19}$$

这两个方程表明宇宙学常数相当于提供了一个负压强项，表现出斥力的效果，以达到在大尺度结构上宇宙是静态的。然而，从物理上讲，这种静态平衡不可能是稳定的。一个很小的扰动就会使时空迅速偏离这一平衡，从而导致整个宇宙或者部分宇宙开始塌缩或者趋向于一个真空 de Sitter 宇宙。因此，宇宙学常数的引入并不能实现构造静态宇宙的设想。当遥远星体的红移被发现后，这种对静态宇宙的描述也就被放弃了。但是，宇宙学常数在经历了历史上的几度沉浮后，至今仍然是现代物理学的一个重要而深刻的问题，尤其是该宇宙模型与当今的天文观测吻合得很好，并且它在理论上可以解释为真空能[13]。

宇宙学常数作为最简单的宇宙学模型，至今仍然存在两个疑难[14]——精细调节问题(fine tuning problem)和宇宙巧合问题(coincidence problem)——亟待解决。所以，人们试图引入新的机制来解释宇宙的加速膨胀。在理论上，宇宙学常数的状态方程参数是一个常数 $w = -1$，它不随着宇宙的时间演化而变化。而天文观测表明，在一定的范围内，状态方程允许随着时间的变化而

变化，只不过这种变化比较缓慢而已。另外，这种随着时间变化的状态方程，在某种程度上或许可以解决或缓解宇宙巧合性问题。基于这些原因，人们提出了用动力学场来充当暗能量的设想。

动力学暗能量通常是由一类在空间上均匀分布且随着时间变化的标量场实现的。这类标量场的特点是：通过在自作用势中缓慢滚动来提供足够的负压强，为宇宙的加速膨胀提供原动力。迄今为止，除宇宙学常数模型[15]外，研究者又提出了很多种暗能量的标量场模型，如精质（Quintessence）模型[16,17]、幽灵（Phantom）模型[18,19]、精灵（Quintom）模型[20]、快子（Tachyon）模型[21]及鬼聚（Ghost Condensate）模型[22]等一系列模型。目前的天文观测数据显示，宇宙学常数作为暗能量的“候选者”仍然与观测符合得很好，但超新星的观测数据更倾向于动力学暗能量“候选者”。所以，迄今为止，人们对暗能量的本质仍不清楚，对暗能量的起源和本性的探索仍有很长一段路要走。

3.2 Quintessence 暗能量模型与黑洞

“暗能量”作为提供宇宙加速膨胀原动力的“候选者”之一，一直是现代物理学的热门话题。一方面，由于现有的天文观测数量与精度都不是很高，所以无法有效地区分暗能量的具体模型；另一方面，处在一个充满暗能量的宇宙学空间中的黑洞，将受到暗能量的影响而改变自身的热力学性质。所以，人们试图通过找到黑洞与暗能量之间的联系，来建立完备的量子引力理论，从而推进物理学的发展。

3.2.1 Quintessence 暗能量模型

Quintessence 暗能量模型是一个具有正则动能的标量场，是最简单的动力学暗能量模型。一个均匀分布的 Quintessence 场就如同一个背景场，当它沿着自身的势能曲线慢速滚落至其位势底部基态时，该标量场就能提供负压强，从而驱动宇宙的加速膨胀。与引力最小耦合的 Quintessence 场 ϕ 的作用量为

$$S_\phi = \int d^4 x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu \phi - V(\phi)\right] \tag{3-20}$$

式中的 $V(\phi)$ 是标量场的势。对作用量变分，可以得到标量场的能量动量张量：

$$T_{\mu\nu}(\phi) = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)\right] \tag{3-21}$$

在平直 FRW 时空中，由度规（3-2）式可知，能量动量张量的各分量呈对

角形式，且空间上的三个分量相同。假定Quintessence场均匀分布于宇宙空间中，那么它对空间部分的导数为零，说明 ϕ 只是时间的函数，即 $\phi=\phi(t)$。因此，$T_{\mu\nu}(\phi)$的对角形式为

$$T^{\mu}_{\nu}(\phi)=\mathrm{diag}(\rho_{\phi},-p_{\phi},-p_{\phi},-p_{\phi}) \tag{3-22}$$

其中标量场 ϕ 贡献的能量密度和压强为

$$\rho_{\phi}\equiv -T^{0}_{0}=\frac{1}{2}\dot{\phi}^{2}+V(\phi) \tag{3-23}$$

$$p_{\phi}\equiv T^{i}_{i}=\frac{1}{2}\dot{\phi}^{2}-V(\phi) \tag{3-24}$$

将(3-23)式和(3-24)式代入方程(3-11)中,可得到标量场的运动方程:

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+\frac{\mathrm{d}V(\phi)}{\mathrm{d}\phi}=0 \tag{3-25}$$

又由物态方程的定义，可知标量场的状态方程为

$$w_{\phi}=\frac{p_{\phi}}{\rho_{\phi}}=\frac{\dot{\phi}^{2}-2V(\phi)}{\dot{\phi}^{2}+2V(\phi)} \tag{3-26}$$

从(3-26)式可以看出，如果标量场的动能项 $\dot{\phi}^2/2$ 小于势能项 $V(\phi)$，状态参数 w_{ϕ}就会小于0，甚至当标量场在势中的滚动非常慢，即 $\dot{\varphi}^2/2\ll V(\phi)$ 时，状态参数 w_{ϕ}就会接近于 -1。由方程(3-11)可知，此时的暗能量密度 ρ 是常数。当 $\dot{\phi}^2/2\gg V(\phi)$ 时，状态方程为 $w_{\phi}=1$，此时标量场的能量密度的演化方式为 $\rho\propto a^{-6}$。所以，对于Quintessence暗能量，状态方程满足 $-1<w_{\phi}<+1$，它可能是这一区间上的常数，也可能缓慢变化或迅速变化甚至振荡，这都取决于势 $V(\phi)$的形式。当选取特殊的 $V(\phi)$时，精质暗能量有一种具有“追踪”行为的解，被称为“追踪解”（track solution），而该Quintessence场被称为“追踪场”（tracker field）[23, 24]。在宇宙初期，场的初始条件的变化范围可以很大，但是在宇宙演化过程中，$\rho_{\phi}(t)$和 $w_{\phi}(t)$会很快趋近于几乎相同的宇宙演化途径，这在一定程度上能够解释或缓解宇宙巧合问题[25]。

3.2.2 Quintessence暗能量包围的黑洞时空

最近，Kiselev考虑了一个静态黑洞的周围充满了一种静态、球对称的Quintessence暗能量，且其状态参数为常数。在假设Quintessence的能量动量张量满足线性叠加性的前提下，他最后得到了爱因斯坦场方程的一系列依赖于状态参数 w_{q}的严格新解。

下面简单回顾Kiselev的工作[26]。一般球对称静态时空的度规为

$$\mathrm{d}s^{2}=\mathrm{e}^{\nu(r)}\mathrm{d}t^{2}-\mathrm{e}^{\mu(r)}\mathrm{d}r^{2}-r^{2}(\mathrm{d}\theta^{2}+\sin^{2}\theta\mathrm{d}\varphi^{2}) \tag{3-27}$$

式中的 ν 和 μ 都只是 r 的函数，与时间 t 无关。若令归一化引力常数 G 满足 $4\pi G=1$，则爱因斯坦场方程的四个非零分量为

$$2T_t^t = -e^{-\mu}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\mu'}{r}\right)+\frac{1}{r^2} \tag{3-28}$$

$$2T_r^r = -e^{-\mu}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\nu'}{r}\right)+\frac{1}{r^2} \tag{3-29}$$

$$2T_\theta^\theta = 2T_\varphi^\varphi = -\frac{1}{2}e^{-\mu}\left(\nu''+\frac{\nu'}{2}-\frac{\nu'-\mu'}{r}-\frac{\nu'\mu'}{2}\right) \tag{3-30}$$

式中的“′”表示对 r 求导。假设 Quintessence 的能量动量张量满足线性叠加条件，则它的分量满足

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q(r) \tag{3-31}$$

$$T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = -\frac{1}{2}\rho_q(3w_q+1) \tag{3-32}$$

从以上两式可以看出，能量动量张量的时间分量部分与空间分量部分是成比例的。

不失一般性，取 $\mu+\nu=0$，并且令 $\mu=-\ln(1+\lambda)$，则(3-31)式和(3-32)式可变为

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{1}{2r^2}(\lambda+r\lambda') \tag{3-33}$$

$$T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = -\frac{1}{4r}(2\lambda'+r\lambda'') \tag{3-34}$$

联立方程(3-33)和方程(3-34)，可以得到 λ 满足的方程：

$$r^2\lambda''+3(1+w_q)r\lambda'+(1+3w_q)\lambda=0 \tag{3-35}$$

这是一个二阶线性齐次常微分方程，它的两个特解形式为

$$\lambda_q=\frac{\xi}{r^{3w_q+1}},\quad \lambda_{bh}=-\frac{\zeta}{r} \tag{3-36}$$

式中的 ξ 和 ζ 是归一化因子。函数 λ_{bh} 代表点状黑洞的一般施瓦希解，并且它与 $w_q=0$ 时的 λ_q 是一致的。

根据 μ，ν 和 λ 之间的关系以及(3-36)式，可以得到度规系数 e^ν 和 e^μ 的表达式，进而可以得到一系列被 Quintessence 暗能量包围的静态球对称黑洞解，其度规形式为

$$ds^2=\left[1-\frac{\zeta}{r}-\sum_n\left(\frac{r_n}{r}\right)^{3w_q+1}\right]dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{\zeta}{r}-\sum_n\left(\frac{r_n}{r}\right)^{3w_q+1}}-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{3-37}$$

式中的 $\zeta = 2M$，M 是黑洞的质量，r_n 是有量纲的归一化参数，w_q 是 Quintessence 物质的状态参数。由(3-37)式可以发现，这个度规在形式上与 de Sitter/Anti - de Sitter 时空度规相似。如果适当选取式中的参数，度规形式可以退化到 Schwarzschild 度规和 Reissner - Nordström 度规情形，这是因为 Schwarzschild 度规和 Reissner - Nordström 度规分别描述真空(能量为零)和电磁场包围的黑洞的情况，而且真空和电磁场的能量动量张量满足线性叠加条件。

3.3 Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空的似正规模

3.3.1 有质量标量场扰动

被 Quintessence 暗能量包围的静态球对称 Schwarzschild 黑洞时空的度规[27]为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{a}{r^{3w_q+1}}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{a}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{3-38}$$

式中的 a 是依赖于 Quintessence 能量密度 ρ_q 的一个归一化因子，它满足：$\rho_q = -\frac{a}{2}\frac{3w_q}{r^{3(w_q+1)}}$。从度规可以看出，当参数 $a=0$ 时，时空退化到标准的 Schwarzschild 黑洞时空。这里采用的号差为$(+1,-1,-1,-1)$。

大家知道，有质量标量场满足的 Klein - Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\psi = u^2\psi \tag{3-39}$$

令波函数 $\psi(t,r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}e^{-i\omega t}Y_{lm}(\theta,\varphi)\phi(r)$，整理后可以得到类似于一维 Schrödinger 方程的径向方程：

$$\frac{d^2\phi r}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]\phi(r) = 0 \tag{3-40}$$

式中的 r_* 是乌龟坐标，满足

$$dr_* = \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{a}{r^{3w_q+1}}} \tag{3-41}$$

把度规方程(3-38)代入方程(3-40)，整理后可得径向微扰方程中的有效势：

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{a}{r^{3w_q+1}}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \frac{a(3w_q+1)}{r^{3w_q+3}} + u^2\right] \tag{3-42}$$

从(3-42)式可以看出，有效势 $V(r)$ 与微扰场的角量子数 l，Quintessence 暗能量的状态参数 w_q 和标量场的质量 u 有关。图 3-2 和图 3-3 分别给出了有效势随着状态参数 w_q 和标量场质量 u 的变化关系曲线图。由图可知，随着 $|w_q|$ 的增加，标量场有效势势垒的峰值减小，而峰值所在的位置几乎未发生变化；随着标量场质量 u 的增加，有效势势垒的峰值增加，并且取得峰值的位置沿着 x 正向增加。

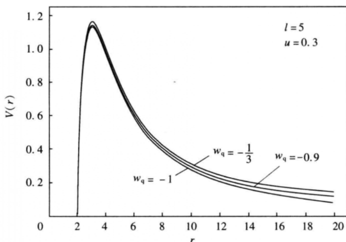


图 3-2 标量场扰动的有效势 $V(r)$ 随 r 的变化，$w_q=-\frac{1}{3}$，-0.9，-1

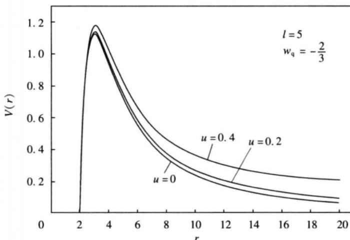


图 3-3 标量场扰动的有效势 $V(r)$ 随 r 的变化，$u=0$，0.2，0.4

下面讨论似正规模频率与 w_q 及 u 的关系。为计算方便，令 $M=1$ 和 $c=0.001$。利用三阶 WKB 近似方法(2-49)式至(2-51)式来估算 Schwarzschild 黑洞时

空中有质量标量场的似正规模频率。表 3-1 给出了标准 Schwarzschild 黑洞时空中标量场扰动的似正规模频率，表 3-2 和表 3-3 是被 Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中有质量标量场的似正规模频率。图 3-4 所示为 $n=0$，$l=4$ 时，Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中标量场扰动的似正规模频率的实部与虚部绝对值之间的变化关系。

表 3-1　标准 Schwarzschild 黑洞时空中标量场的似正规模

($u=0.2$，$l=5$)

ω	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$l=5$	1.06575 − 0.09540i	1.05541 − 0.28752i	1.03616 − 0.48313i	1.01011 − 0.68309i

表 3-2　Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中标量场的似正规模

($l=4$，$n=0$)

$3w_q+1$	ω ($u=0$)	ω ($u=0.1$)	ω ($u=0.3$)	ω ($u=0.5$)
−0.1	0.86588 − 0.09618i	0.86775 − 0.09583i	0.88277 − 0.09302i	0.91309 − 0.08728i
−0.5	0.86506 − 0.09605i	0.86693 − 0.09570i	0.88195 − 0.09289i	0.91226 − 0.08717i
−0.9	0.86379 − 0.09588i	0.86566 − 0.09553i	0.88066 − 0.09272i	0.91094 − 0.08702i
−1.3	0.86179 − 0.09564i	0.86366 − 0.09530i	0.87863 − 0.09251i	0.90884 − 0.08684i
−1.7	0.85868 − 0.09536i	0.86054 − 0.09502i	0.87545 − 0.09227i	0.90554 − 0.08668i
−1.99	0.85537 − 0.09515i	0.85722 − 0.09481i	0.87206 − 0.09211i	0.90200 − 0.08663i

表 3-3　Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中标量场的似正规模

($u=0.2$，$l=5$)

$3w_q+1$	ω ($n=0$)	ω ($n=1$)	ω ($n=2$)	ω ($n=3$)
−0.01	1.06415 − 0.09520i	1.05383 − 0.28694i	1.03462 − 0.48214i	1.00863 − 0.68169i
−0.2	1.06377 − 0.09515i	1.05346 − 0.28679i	1.03426 − 0.48188i	1.00828 − 0.68133i
−0.4	1.06327 − 0.09509i	1.05297 − 0.28660i	1.03379 − 0.48156i	1.00783 − 0.68088i
−0.6	1.06266 − 0.09501i	1.05236 − 0.28637i	1.03320 − 0.48119i	1.00726 − 0.68034i
−0.8	1.06189 − 0.09493i	1.05161 − 0.28611i	1.03246 − 0.48074i	1.00656 − 0.67970i
−1.0	1.06092 − 0.09483i	1.05066 − 0.28580i	1.03155 − 0.48021i	1.00569 − 0.67895i
−1.2	1.05971 − 0.09471i	1.04948 − 0.28545i	1.03042 − 0.47961i	1.00462 − 0.67808i
−1.4	1.05821 − 0.09458i	1.04801 − 0.28505i	1.02903 − 0.47893i	1.00331 − 0.67709i
−1.6	1.05632 − 0.09458i	1.04619 − 0.28462i	1.02732 − 0.47817i	1.00173 − 0.67595i
−1.8	1.05396 − 0.09444i	1.04393 − 0.28417i	1.02523 − 0.47734i	0.99985 − 0.67466i
−1.99	1.05118 − 0.09417i	1.04130 − 0.28374i	1.02284 − 0.47651i	0.99774 − 0.67329i

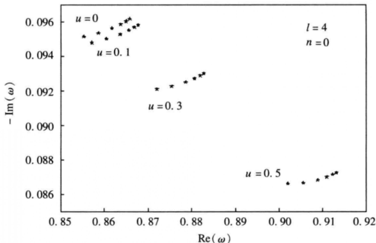


图 3-4 标量场扰动的似正规模频率

从获得的数值结果和图像分析来看，一方面，有 Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中标量场扰动的似正规模频率的实部 $\mathrm{Re}(\omega)$ 随着标量场质量 u 的增加而增加，而虚部的绝对值 $|\mathrm{Im}(\omega)|$ 则随着 u 的增大而减小，如图 3-4 所示。大家知道，具有复频率的黑洞似正规模，其实部代表扰动场的实际振动频率，而其虚部则表示扰动场的实际衰减的快慢。所以，上述现象说明标量场的质量减缓了似正规模的衰减程度，却增加了它的振荡频率，而且研究结果表明，似正规模频率是随着 u 呈线性变化的。另一方面，随着 Quintessence 状态参数绝对值 $|w_q|$ 的增加，复频率的实部和虚部的绝对值均随之减小，当 $|w_q|$ 越大时，标量场衰减得就越慢。与标准 Schwarzschild 黑洞时空中标量场扰动的似正规模频率（见表 3-1）相比，有暗能量存在时 Schwarzschild 黑洞时空的似正规模频率的实部和虚部绝对值均要更小些。这些结论表明：由于 Quintessence 暗能量的出现，有质量标量场的振荡衰减速度缓慢了。

3.3.2 Dirac 场扰动

一般来说，弯曲时空中无质量 Dirac 场方程可以写为[28]

$$[\gamma^a e_a^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu)]\psi = 0 \tag{3-43}$$

式中的标架 e_a^μ 是 e_μ^a 的逆矩阵，而 e_μ^a 的形式则由度规来定义，即

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, e_\mu^a\, e_\nu^b \tag{3-44}$$

式中的 $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$ 是闵可夫斯基(Minkowski)度规。

另外，(3-43)式中 $\boldsymbol{\gamma}^a$ 为Dirac矩阵：

$$\boldsymbol{\gamma}^0=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}^i=\begin{pmatrix}0 & -i\boldsymbol{\sigma}^i\\ i\boldsymbol{\sigma}^i & 0\end{pmatrix}\quad (i=1,2,3) \tag{3-45}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}^i$ 是泡利矩阵(Pauli Matrices)：

$$\boldsymbol{\sigma}^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\sigma}^2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\sigma}^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3-46}$$

$\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ 是旋联络，定义如下：

$$\boldsymbol{\Gamma}_\mu=\frac{1}{8}[\boldsymbol{\gamma}^a,\boldsymbol{\gamma}^b]\boldsymbol{e}_a^\nu e_{b\nu;\mu} \tag{3-47}$$

式中的 $e_{b\nu;\mu}=\partial_\mu e_{b\nu}-\Gamma_{\mu\nu}^a e_{ba}$，是 $e_{b\nu}$ 的协变微商，$\Gamma_{\mu\nu}^a$ 是克里斯托弗(Christoffel)符号。

$\boldsymbol{e}_\mu^a$ 可表示为

$$\boldsymbol{e}_\mu^a=\mathrm{diag}(f^{\frac{1}{2}},f^{-\frac{1}{2}},r,r\sin\theta) \tag{3-48}$$

对于Quintessence暗能量包围的黑洞时空，$f=1-2Mr^{-1}-ar^{-(3w_q+1)}$，是(3-38)式的度规系数。

旋联络 $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ 的四个分量可以表示为

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Gamma}_0=\frac{1}{4}f'\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1\\
&\boldsymbol{\Gamma}_1=0\\
&\boldsymbol{\Gamma}_2=\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^1\boldsymbol{\gamma}^2\\
&\boldsymbol{\Gamma}_3=\frac{1}{2}(f^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^1\boldsymbol{\gamma}^3\sin\theta+\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^3\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{3-49}$$

将(3-48)式和(3-49)式代入到(3-43)式中，Dirac方程可变成

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}^0}{\sqrt{f}}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sqrt{f}\boldsymbol{\gamma}^1\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{1}{4f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\psi+\frac{\boldsymbol{\gamma}^2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\right)\psi+\frac{\boldsymbol{\gamma}^3}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=0 \tag{3-50}$$

定义(3-50)式解的形式为

$$\psi=f^{-\frac{1}{4}}\boldsymbol{\Phi} \tag{3-51}$$

Dirac方程可以化简为

$$\left[\frac{\boldsymbol{\gamma}^0}{\sqrt{f}}\frac{\partial}{\partial t}+\sqrt{f}\boldsymbol{\gamma}^1\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\frac{\boldsymbol{\gamma}^2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\right)+\frac{\boldsymbol{\gamma}^3}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{\Phi}=0 \tag{3-52}$$

假设方程解的形式如下：

$$\Phi(t,r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\dfrac{iK^{(\pm)}(r)}{r}\phi_{jm}^{\pm}(\theta,\varphi)\\ \dfrac{R^{(\pm)}(r)}{r}\phi_{jm}^{\pm}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3-53}$$

其中，旋量角谐函数

$$\phi_{jm}^{+}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{j+m}{2j}}Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\\ \sqrt{\dfrac{j-m}{2j}}Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}\quad\left(j=l+\frac{1}{2}\right) \tag{3-54}$$

$$\phi_{jm}^{-}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{j-m+1}{2(j+1)}}Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\\ -\sqrt{\dfrac{j+m+1}{2(j+1)}}Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}\quad\left(j=l-\frac{1}{2}\right) \tag{3-55}$$

$Y_l^{m\pm\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)$是标准球谐函数，$\omega$ 是似正规模的频率。

进而方程(3-52)可改写成简单的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K^{\pm}\\ R^{\pm}\end{pmatrix}-\frac{\partial}{\partial r_*}\begin{pmatrix}K^{\pm}\\ R^{\pm}\end{pmatrix}+f^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}r^{-1}k_{\pm} & 0\\ 0 & -r^{-1}k_{\pm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K^{\pm}\\ R^{\pm}\end{pmatrix}=0 \tag{3-56}$$

为了简化径向方程，需要分别单独考虑(+)和(−)的情况。经过分析后发现，若将 $K^{\pm}$ 和 $R^{\pm}$ 中的正、负号可以统一起来，记作 K 和 R，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}r_*^2}+(\omega^2-V_1)K=0 \tag{3-57}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r_*^2}+(\omega^2-V_2)R=0 \tag{3-58}$$

其中，势函数 V_1 和 V_2 具有如下形式：

$$V_1=\frac{|k|\sqrt{f}}{r^2}\left(|k|\sqrt{f}+\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-f\right)\quad\left(k=j+\frac{1}{2},\ j=l+\frac{1}{2}\right) \tag{3-59}$$

$$V_2=\frac{|k|\sqrt{f}}{r^2}\left(|k|\sqrt{f}-\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}+f\right)\quad\left(k=-j-\frac{1}{2},\ j=l-\frac{1}{2}\right) \tag{3-60}$$

式中的 V_1 和 V_2 是对应同一势的超对称伙伴。研究结果表明，以这种方式相联系的势能对 K 和 R 都具有相同的似正规模频率，这意味着 Dirac 粒子和它的反粒子在一个黑洞时空中具有相同的似正规模频率。因此，下面的讨论只需考虑有效势为 $V(r)$（即 V_1）的情况。这里令黑洞质量 $M=1$。

图 3-5 和图 3-6 分别给出了 Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中无质量 Dirac 场扰动的有效势 $V(r)$ 随参量 r 变化的情况。令参数 $a=$

0.001。

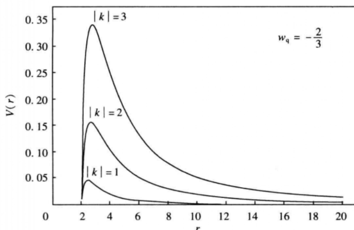


图3-5 无质量Dirac场的有效势 $V(r)$ 随 r 的变化，$|k|=1, 2, 3$

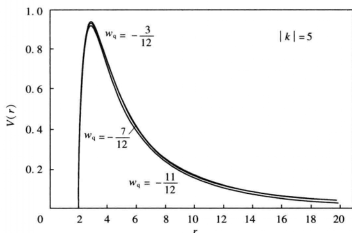


图3-6 无质量Dirac场的有效势 $V(r)$ 随 r 的变化，$w_q = -\frac{3}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{11}{12}$

表3-4给出了标准Schwarzschild黑洞时空中无质量Dirac场的似正规模频率。表3-5所示的数值结果是Quintessence暗能量包围的Schwarzschild黑洞时空中无质量Dirac扰动场的似正规模频率，$|k|=1, 2, 3, 4, 5$。

表3-4 标准Schwarzschild黑洞时空中无质量Dirac场的似正规模频率

ω	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\|k\|=4$	0.76719 − 0.09628i	0.75396 − 0.29150i	0.73045 − 0.49088i	0.69992 − 0.69571i

表 3-5 Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中无质量 Dirac 扰动的似正规模

（$|k|=4$）

$3w_q+1$	ω ($n=0$)	ω ($n=1$)	ω ($n=2$)	ω ($n=3$)
-0.01	0.76603 - 0.09608i	0.75283 - 0.29046i	0.72938 - 0.48988i	0.69892 - 0.69429i
-0.1	0.76591 - 0.09606i	0.75271 - 0.29039i	0.72927 - 0.48976i	0.69882 - 0.69412i
-0.3	0.76560 - 0.09600i	0.75241 - 0.29021i	0.72898 - 0.48947i	0.69854 - 0.69371i
-0.5	0.76521 - 0.09593i	0.75203 - 0.29000i	0.72861 - 0.48911i	0.69820 - 0.69320i
-0.7	0.76472 - 0.09584i	0.75155 - 0.28975i	0.72816 - 0.48869i	0.69778 - 0.69260i
-0.9	0.76410 - 0.09575i	0.75096 - 0.28946i	0.72760 - 0.48819i	0.69725 - 0.69189i
-1.1	0.76334 - 0.09564i	0.75022 - 0.28912i	0.72690 - 0.48760i	0.69661 - 0.69105i
-1.3	0.76240 - 0.09551i	0.74931 - 0.28872i	0.72605 - 0.48692i	0.69583 - 0.69007i
-1.5	0.76121 - 0.09537i	0.74818 - 0.28827i	0.72502 - 0.48615i	0.69490 - 0.68893i
-1.7	0.75974 - 0.09521i	0.74679 - 0.28778i	0.72376 - 0.48526i	0.69380 - 0.68760i
-1.9	0.75791 - 0.09504i	0.74509 - 0.28724i	0.72226 - 0.48426i	0.69251 - 0.68604i
-1.99	0.75695 - 0.09497i	0.74420 - 0.28699i	0.72150 - 0.48377i	0.69187 - 0.68525i

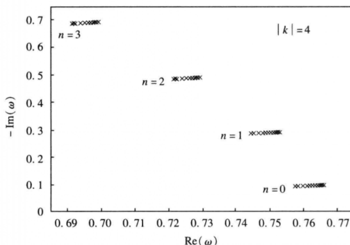


图 3-7 无质量 Dirac 扰动的似正规模频率

图 3-7 所示为 $|k|=4$ 时，Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中，无质量 Dirac 扰动似正规模频率的实部与虚部绝对值之间的变化关系。由数值结果和图像分析可以得到如下结论：第一，当给定参数 $|k|$ 和 n 时，随着状态参数 w_q 的减小，Dirac 似正规模频率的实部 $\mathrm{Re}(\omega)$ 和虚部的绝

对值 $|\mathrm{Im}(\omega)|$ 均减小。这说明，w_q 的值越小，Dirac 扰动衰减的速度越慢。第二，与标准 Schwarzschild 黑洞时空中无质量 Dirac 扰动的似正规模频率(如表3-4)相比较，有 Quintessence 暗能量的时候，Dirac 似正规模频率的实部和虚部的绝对值较小。换句话说，由于 Quintessence 暗能量的存在，无质量 Dirac 扰动场的衰减速度变慢了。

3.3.3 引力场扰动

本小节讨论被 Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空引力扰动的似正规模[29]。

背景时空度规 $g_{\mu\nu}$ 由(3-38)式给出，考虑在该黑洞视界外部空间有一个微小的度规扰动 $h_{\mu\nu}$，且 $h_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}$，则爱因斯坦场方程中的里奇(Ricci)张量为 $R_{\mu\nu}+\delta R_{\mu\nu}$，可以从 $g_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ 中计算得到，而 $h_{\mu\nu}$ 可以从 $g_{\mu\nu}$ 的计算中得到。里奇张量的变量 $\delta R_{\mu\nu}$ 可以表示成如下形式：

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta \Gamma^{\beta}_{\mu\nu;\beta} + \delta \Gamma^{\beta}_{\mu\beta;\nu} \tag{3-61}$$

其中，仿射联络的微小变化为

$$\delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu}(h_{\beta\nu;\gamma} + h_{\gamma\nu;\beta} - h_{\beta\gamma;\nu}) \tag{3-62}$$

另外，在 Regge - Wheeler 规范下，扰动度规 $h_{\mu\nu}$ 可以有如下规范形式：

$$h_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0(r) & r & h_1(r) & 0 \end{vmatrix} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} P_l(\cos\theta)\right] \tag{3-63}$$

式中的 $P_l(\cos\theta)$ 是 l 阶勒让德(Legendre)多项式。整理方程(3-61)、(3-62)和(3-63)，并且分离变量，可以得到径向方程：

$$\frac{\mathrm{i}\omega h_0(r)}{f} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[f h_1(r)] = 0 \quad (\delta R_{23} = 0) \tag{3-64}$$

$$\frac{\mathrm{i}\omega}{f}\left[\frac{\mathrm{d}h_0(r)}{\mathrm{d}r} - 2\frac{h_0(r)}{r} + \mathrm{i}\omega h_1(r)\right] + (l-1)(l+2)\frac{h_1(r)}{r^2} = 0 \quad (\delta R_{13} = 0) \tag{3-65}$$

其中

$$f = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{a}{r^{3w_q+1}}$$

定义乌龟坐标 $r_* = \int \frac{\mathrm{d}r}{f}$ 和 $\psi(r) = \frac{f h_1(r)}{r}$，联立方程(3-64)和(3-65)，

并消去 $h_0(r)$，可以得到一个二阶类薛定谔方程：

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr_*^2}+[\omega^2-V(r)]\psi(r)=0 \tag{3-66}$$

其中，扰动场的势函数为

$$V(r)=\left(1-\frac{2M}{r}-\frac{a}{r^{3w_q+1}}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{6M}{r^3}-\frac{a(3w_q+3)}{r^{3w_q+3}}\right] \tag{3-67}$$

从(3-67)式可以看出，势函数 $V(r)$ 与状态参量 w_q、角量子数 l、归一化常数 a、黑洞的质量 M 有关。这里取 $M=1$ 和 $a=0.001$。

图 3-8 给出了当 $l=5$ 时，静态球对称 Quintessence 物质包围的 Schwarzschild 黑洞时空中引力扰动的有效势 $V(r)$ 随坐标 r 变化的情况，曲线分别为 $w_q=-1/3$，-0.9，-1。可见，随着状态参数 w_q 的增加，引力扰动的有效势势垒的峰值减小。

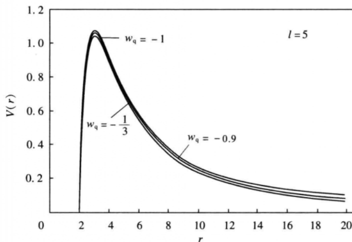


图 3-8 引力扰动的有效势 $V(r)$ 随坐标 r 的变化

为了方便与没有暗能量存在的 Schwarzschild 黑洞情形相比较，表 3-6 中给出了标准 Schwarzschild 黑洞时空中引力场扰动的似正规模频率。利用三阶 WKB 近似方法估算 Quintessence 物质包围的 Schwarzschild 黑洞在引力扰动下的似正规模频率，数值结果见表 3-7。

表 3-6 标准 Schwarzschild 黑洞时空中引力场扰动的似正规模频率

ω	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$n=0$	0.37316 − 0.08922i	0.59927 − 0.09273i	0.80910 − 0.09417i	1.01225 − 0.09487i

表 3-7 Quintessence 包围的 Schwarzschild 黑洞时空中引力场扰动的似正规模频率

($l=4$)

$3w_q+1$	ω ($n=0$)	ω ($n=1$)	ω ($n=2$)	ω ($n=3$)
-0.01	0.80788 - 0.09398i	0.79531 - 0.28380i	0.77250 - 0.47801i	0.74225 - 0.67693i
-0.1	0.80775 - 0.09396i	0.79519 - 0.28373i	0.77239 - 0.47790i	0.74214 - 0.67677i
-0.3	0.80742 - 0.09391i	0.79487 - 0.28356i	0.77208 - 0.47762i	0.74186 - 0.67637i
-0.5	0.80701 - 0.09384i	0.79446 - 0.28336i	0.77170 - 0.47728i	0.74150 - 0.67589i
-0.7	0.80649 - 0.09376i	0.79396 - 0.28312i	0.77122 - 0.47687i	0.74105 - 0.67532i
-0.9	0.80585 - 0.09367i	0.79334 - 0.28284i	0.77063 - 0.47640i	0.74050 - 0.67464i
-1.1	0.80505 - 0.09356i	0.79256 - 0.28252i	0.76989 - 0.47584i	0.73982 - 0.67385i
-1.3	0.80405 - 0.09344i	0.79160 - 0.28215i	0.76899 - 0.47521i	0.73900 - 0.67292i
-1.5	0.80280 - 0.09331i	0.79040 - 0.28173i	0.76790 - 0.47448i	0.73802 - 0.67186i
-1.7	0.80124 - 0.09316i	0.78893 - 0.28128i	0.76657 - 0.47367i	0.73686 - 0.67062i
-1.9	0.79929 - 0.09301i	0.78712 - 0.28080i	0.76497 - 0.47276i	0.73549 - 0.66920i
-1.99	0.79827 - 0.09295i	0.78617 - 0.28058i	0.76415 - 0.47233i	0.73482 - 0.66848i

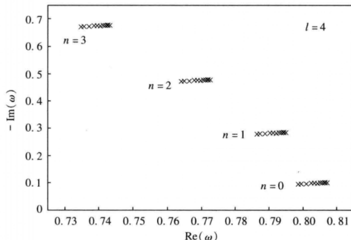


图 3-9 引力扰动的似正规模频率

通过对表 3-7 中的数值结果及图 3-9 的分析发现，对于给定的 $M=1$，$a=0.001$ 和 l，随着 Quintessence 暗能量的状态参数 w_q的减小，引力扰动似正规模频率的实部 $\mathrm{Re}(\omega)$和虚部的绝对值$|\mathrm{Im}(\omega)|$都随之减小。可见，当 w_q变得很小时，引力场衰减的速度就会变得很缓慢了，并且与标准 Schwarzschild

黑洞时空情形(表3-6)相比较，有暗能量存在时的似正规模频率的实部和虚部的绝对值均较小，说明此时引力波振荡和衰减的速度均变慢。这一现象与标量场扰动和Dirac场扰动情况是相同的。

3.3.4 电磁场扰动

本小节讨论被Quintessence暗能量包围的Schwarzschild黑洞外部时空中的电磁场扰动的似正规模[31]。电磁场满足的麦克斯韦方程为

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=0,\qquad F_{\mu\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu} \tag{3-68}$$

其中,“;”代表协变微分,“,”代表普通微分。$F^{\mu\nu}$是黑洞时空背景下的电磁场逆变张量，而$F_{\mu\nu}$是其协变张量，满足$F^{\mu\nu}=g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}F_{\mu\nu}$。时空度规$g^{\mu\nu}$由(3-38)式提供。

由于背景时空(3-38)式是球对称的，所以可以把四维矢量A_μ改写成球谐函数的形式：

$$A_\mu(t,r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{a^{l,m}(t,r)}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{lm}\\-a^{l,m}(t,r)\sin\theta\partial_\theta Y_{lm}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f^{lm}(t,r)Y_{lm}\\h^{lm}(t,r)Y_{lm}\\k^{lm}(t,r)\partial_\theta Y_{lm}\\k^{lm}(t,r)\partial_\varphi Y_{lm}\end{pmatrix}\right] \tag{3-69}$$

(3-69)式等号右端第一列宇称为$(-1)^{l+1}$，第二列宇称为$(-1)^l$。l为角量子数，m是磁量子数。

将(3-69)式代入麦克斯韦方程(3-68)中，可以得到关于扰动场的二阶微分方程，形如(3-66)式。对于电磁扰动情形，(3-66)式中的波函数$\psi(r)$是(3-69)式中各函数$f^{lm}(t,r)$，$h^{lm}(t,r)$，$k^{lm}(t,r)$和$a^{lm}(t,r)$的线性组合，对于宇称的奇偶性不同，$\psi(r)$的取值也不同：

$$\psi(r)=a^{lm}\quad((-1)^{l+1}) \tag{3-70}$$

$$\psi(r)=\frac{r^2}{l(l+1)}\left(-\mathrm{i}\omega h^{lm}-\frac{\mathrm{d}f^{lm}}{\mathrm{d}r}\right)\quad(-1)^l \tag{3-71}$$

并且势函数$V(r)$具有如下形式：

$$V(r)=\left(1-\frac{2M}{r}-\frac{a}{r^{3w_q+1}}\right)\cdot\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{3-72}$$

电磁扰动的势函数$V(r)$与角量子数l和Quintessence态参数w_q有关，这里取$M=1$和$c=0.001$。图3-10给出了在电磁扰动情形下，有效势$V(r)$与状态参数w_q的变化关系曲线，分别对应于$w_q=-1/3$，-0.9，-1。从图3-10中可以看出，当$l=5$时，随着Quintessence状态参数w_q的增大，势垒的峰值

增加，而峰值产生的位置变化很微小。

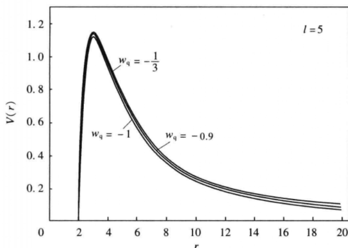


图 3-10 电磁扰动的势函数 $V(r)$ 随着坐标 r 的变化

表 3-8 给出了标准 Schwarzschild 黑洞时空中电磁场扰动的似正规模频率。利用三阶 WKB 近似方法，可以计算出 Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞外部时空电磁扰动的似正规模频率。数值结果分列于表 3-9 和表3-10 中。

表 3-8 标准 Schwarzschild 黑洞时空中电磁场扰动的似正规模频率

($n=0$)

ω	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$n=0$	0.45713 − 0.09507i	0.65673 − 0.09563i	0.85301 − 0.09587i	1.04787 − 0.09598i

表 3-9 Quintessence 包围的 Schwarzschild 黑洞时空中电磁场扰动的似正规模频率

($l=2$)

ω	$3w_q+1=-0.01$	$3w_q+1=-0.8$	$3w_q+1=-1.2$	$3w_q+1=-1.99$
$n=0$	0.45645 − 0.09487i	0.4552 − 0.09460i	0.45462 − 0.09438i	0.45110 − 0.09380i
$n=1$	0.43520 − 0.29038i	0.43434 − 0.28954i	0.43352 − 0.28885i	0.43055 − 0.28683i

表 3-10 Quintessence 包围的 Schwarzschild 黑洞时空中电磁场扰动的似正规模频率

($l=4$)

$3w_q+1$	ω ($n=0$)	ω ($n=1$)	ω ($n=2$)	ω ($n=3$)
−0.01	0.85173 − 0.09567i	0.83989 − 0.28875i	0.81835 − 0.48601i	0.78980 − 0.68782i
−0.1	0.85160 − 0.09565i	0.83975 − 0.28869i	0.81823 − 0.48590i	0.78969 − 0.68766i

续表 3-10

$3w_q+1$	ω ($n=0$)	ω ($n=1$)	ω ($n=2$)	ω ($n=3$)
-0.3	0.85125 - 0.09559i	0.83941 - 0.28851i	0.81790 - 0.48561i	0.78938 - 0.68725i
-0.5	0.85082 - 0.09552i	0.83899 - 0.28831i	0.81749 - 0.48526i	0.78899 - 0.68675i
-0.7	0.85027 - 0.09544i	0.83846 - 0.28806i	0.81699 - 0.48484i	0.78851 - 0.68616i
-0.9	0.84960 - 0.09534i	0.83780 - 0.28776i	0.81635 - 0.48434i	0.78791 - 0.68545i
-1.1	0.84875 - 0.09523i	0.83697 - 0.28742i	0.81557 - 0.48377i	0.78718 - 0.68463i
-1.3	0.84770 - 0.09510i	0.83595 - 0.28704i	0.81460 - 0.48310i	0.78628 - 0.68367i
-1.5	0.84638 - 0.09496i	0.83469 - 0.28660i	0.81342 - 0.48234i	0.78521 - 0.68256i
-1.7	0.84474 - 0.09481i	0.83312 - 0.28612i	0.81199 - 0.48148i	0.78392 - 0.68128i
-1.9	0.84269 - 0.09465i	0.83119 - 0.28560i	0.81025 - 0.48053i	0.78241 - 0.67980i
-1.99	0.84161 - 0.09457i	0.83019 - 0.28536i	0.80937 - 0.48007i	0.78165 - 0.67906i

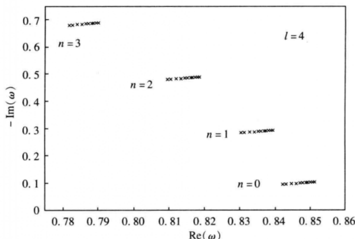


图 3-11 电磁扰动的似正规模频率

在图 3-11 中描绘了 $l=4$ 时，Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空中电磁扰动下似正规模频率的实部与虚部绝对值之间的变化关系。分析发现：随着 Quintessence 态参数 w_q 的增大，似正规模频率的实部和虚部的绝对值均随之增加。与标准 Schwarzschild 黑洞的情形比较发现，有 Quintessence 暗能量的存在，电磁扰动似正规模频率的实部和虚部均较小，这一现象说明，由于 Quintessence 暗能量状态参数 w_q 的出现，电磁扰动场振荡的频率越小，且微扰场衰减的速度减慢。

3.4 Quintessence 暗能量包围的整体单极子黑洞时空的似正规模

研究整体单极子黑洞之前，先来认识一下什么是整体单极子。Kibble[31] 和 Vilenkin[32] 指出：在早期宇宙的大统一相变过程中，可能产生诸如磁单极子、宇宙弦、畴壁、Texture 等类型的拓扑残缺，其残缺的类型取决于真空流形的拓扑。当真空流形包含一个不能连续塌缩成点的曲面时，就会有单极子形成。与基本粒子的形成相似，单极子的形成也是对称性破缺的结果，其能量大部分集中在靠近单极子附近的小区域内。大统一理论与大爆炸宇宙学预言：宇宙早期有很多这样的单极子产生并且残留下来，但迄今为止，还没有实验观测到这样的单极子存在，以至人们采用暴涨理论来研究宇宙中的单极子问题。当整体对称性破缺，即通过 $O(3)(U(2))$ 对称性自发破缺到 $U(1)$ 对称性时，就会有整体单极子形成。整体单极子拥有一个戈德斯通（Goldstone）场，它具有巨大的能量而能够产生很强的引力场。由于该场的能量密度与 r^2 成反比，球体体积与 r^3 成正比，所以该场的总能量是线性增加的。

既然单极子周围能够环绕这么大的能量场，单极子所造成的引力效应也会很强，但根据 Barriola 等人的计算，这种引力效应将与拓扑空间破缺角相抵消，然后剩下一个对非相对论物质几乎不产生影响的质量。Barriola 等人还发现了正反整体单极子即使相隔很远，它们之间的吸引力也还是非常大的。这说明，如同夸克禁闭导致人们无法发现自由夸克一样，这种巨大的新引力的存在导致单极子很难被发现。到目前为止，还没有发现一个单极子，可能是因为它们都相互湮灭掉了，当然也有可能分别落入两个黑洞出不来了。如果黑洞吞噬了整体单极子，将会形成带有整体单极子的黑洞。最先提出这种想法的是 Lee 等[33]。1989 年，Barriola 和 Vilenkin[34] 给出了第一个整体单极子时空度规，自那以后，对整体单极子黑洞的研究从未间断过。Liebling[35] 讨论了静态整体单极子存在的可能性，Salgado[36] 提出了一个与时间无关的整体单极子黑洞模型，Watabe 等[37] 对整体单极子黑洞的稳定性做了分析，Yu[38] 研究了整体单极子黑洞的有质量标量微扰场的晚期衰减行为，Wu 等人[39] 则考虑了 Reissner - Nordström - de Sitter 整体单极子黑洞中带电粒子的霍金辐射，李新洲和 Bertrand 分析了整体单极子在 de Sitter 和 Anti - de Sitter 时空中的性质。Li 等人给出了被静态球对称 Quintessence 物质包围的整体单极子解[40]，当这样一个单极子被原初黑洞吞噬后，将形成一个带有整体单极子和 Quintessence 物质的黑洞。考虑到这一新解在加速膨胀宇宙中将会是很有意义的，因

此，对这一时空进行力学扰动的研究是很有必要的工作。下面计算静态球对称 Quintessence 物质包围的整体单极子黑洞时空的似正规模，分别考虑有质量标量场扰动和无质量 Dirac 场扰动情况，并且详细地讨论这一黑洞时空中各种参数对似正规模频率的影响。

3.4.1 黑洞度规

本小节简单回顾 Quintessence 暗能量包围的整体单极子黑洞时空的度规。

能够产生整体单极子的模型很多，取具有如下 Lagrange 量的最简单模型：

$$L=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^\alpha\partial^\mu\phi^\alpha-\frac{1}{4}\lambda(\phi^\alpha\phi^\alpha-\eta^2)^2 \tag{3-73}$$

式中，λ 是 Goldston 场的自对耦常数；$\eta\ll m_{\mathrm{p}}$，是产生整体单极子时的对称性自发破缺标度——通常为大统一标度 ~ 10^{16} GeV，$m_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$，是 Planck 质量；$\phi^\alpha$是一个只含有三个分量的标量场，满足

$$\phi^\alpha=\eta f(r)\frac{x^\alpha}{r},\qquad x^\alpha x^\alpha=r^2\quad(\alpha=1,\ 2,\ 3) \tag{3-74}$$

(3-73)式的 Lagrange 量是满足 $O(3)$对称性的，而且可以自发破缺为 $U(1)$对称性。可以这样理解：满足这个 Lagrange 量的真空本应该满足 $O(3)$对称性而位于一个球面上，但是，由于体系的能量不够，不能对真空进行一个转动操作，所以真空就固定在某一个方向上，于是就会自发地产生对称性破缺，最终只具有 $U(1)$对称性。

一般的静态球对称度规满足如下形式：

$$\mathrm{d}s^2=B(r)\mathrm{d}t^2-A(r)\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{3-75}$$

由(3-73)式和(3-75)式，可以得到$f(r)$满足的场方程：

$$\frac{1}{A}f''+\left[\frac{2}{Ar}+\frac{1}{2B}\left(\frac{B}{A}\right)'\right]f'-\frac{2}{r^2}f-\lambda\eta^2(f^2-1)f=0 \tag{3-76}$$

其中“′”表示f对r求一阶导数。

当考虑一个整体单极子周围充满一种静态、球对称的 Quintessence 暗能量时，爱因斯坦场方程可以写成如下形式：

$$G_{\mu\nu}=8\pi G(T_{\mu\nu}+\tau_{\mu\nu}) \tag{3-77}$$

方程中 $T_{\mu\nu}$是相对于 Lagrange 量 L 的能量动量张量，$\tau_{\mu\nu}$是 Quintessence 暗能量的能量动量张量，它也可以用一个自由参数 w_{q}来表示。因此，在静态球对称情形下，假设 Quintessence 物质的能量动量张量满足线性叠加性，则它们的分量满足

$$T_t^t = T_r^r = \tilde{\rho}_q(r) \tag{3-78}$$

$$T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = -\frac{1}{2}\tilde{\rho}_q(3w_q + 1) \tag{3-79}$$

其中 w_q 是 Quintessence 暗能量的状态参数，满足 $-1 < w_q < -1/3$。

因此，爱因斯坦场方程可以改写成

$$-\frac{1}{A}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{A'}{Ar}\right) + \frac{1}{r^2} = \varepsilon^2\left[\frac{f^2}{r^2} + \frac{f'^2}{2A} + \frac{\lambda^2}{4}(f^2 - 1)^2 + \rho_q\right] \tag{3-80}$$

$$-\frac{1}{A}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{B'}{Br}\right) + \frac{1}{r^2} = \varepsilon^2\left[\frac{f^2}{r^2} + \frac{f'^2}{2A} + \frac{\lambda^2}{4}(f^2 - 1)^2 + \rho_q\right] \tag{3-81}$$

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{A'}{Ar} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{A'B'}{2AB} - \frac{B'}{Br} - \frac{B''}{B}\right) = \varepsilon^2\left[\frac{f'^2}{2A} + \frac{\lambda^2}{4}(f^2 - 1)^2 - \frac{3w_q + 1}{2}\rho_q\right] \tag{3-82}$$

其中小量 ε 是一个无量纲参数，满足 $\varepsilon = \sqrt{8\pi G\eta^2} \approx 1.03 \times 10^{-16}\left(\frac{\eta}{250\text{GeV}}\right)$；另一个无量纲参数 $\rho_q \equiv \tilde{\rho}_q/\eta^4$。

解上述爱因斯坦场方程(3-80)至(3-82)以及标量场方程(3-76)，可以得到被静态球对称 Quintessence 暗能量包围的整体单极子度规：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2G\eta m}{r} - \varepsilon^2 + \frac{\rho_0}{3w_q}r^{-3w_q-1}\right)dt^2 \\ &= \left(1 - \frac{2G\eta m}{r} - \varepsilon^2 + \frac{\rho_0}{3w_q}r^{-3w_q-1}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned} \tag{3-83}$$

式中，$m \approx -\frac{16\pi\eta}{3\lambda}$，无量纲参数是亏损立体角的标度；$\rho_0$ 是在 $r = 1$ 时 Quintessence 的能量密度。当这样一个被静态球对称 Quintessence 暗能量包围的整体单极子被一个质量为 $\tilde{M}$ 的原初黑洞吞没时，理论上可以得到一个带有亏损立体角的静态球对称 Quintessence 黑洞，其度规形式为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r} - \varepsilon^2 + \frac{\rho_0}{3w_q}r^{-3w_q-1}\right)dt^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r} - \varepsilon^2 + \frac{\rho_0}{3w_q}r^{-3w_q-1}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned} \tag{3-84}$$

方程中 $M = G\eta(\tilde{M} - m)$，是黑洞的质量。

3.4.2 似正规模频率与参数的关系

把度规(3-84)式代入到有质量标量场的微扰方程中，并进行分离变量，整理后可以得到径向微扰方程中的有效势：

$$V(r)=\left(1-\frac{2M}{r}-\varepsilon^2+\frac{\rho_0}{3w_q}r^{-3w_q-1}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2M}{r^3}+\frac{\rho_0(3w_q+1)}{3w_q\,r^{3w_q+3}}+u^2\right] \tag{3-85}$$

显然，从(3-85)式可以看出，标量场的有效势与微扰场的角量子数 l、Quintessence 物质的状态参数 w_q、能量密度 ρ_0、标量场的质量 u、亏损立体角参数 ε、黑洞的质量 M 有关。计算过程中，令黑洞质量 $M=1$。

图 3-12 给出了静态球对称 Quintessence 暗能量包围的整体单极子黑洞时空标量场扰动的有效势 $V(r)$ 随 r 变化的关系。四个小图中的曲线分别对应于 $l=2, 3, 4, 5$；$w_q=-5/12, -7/12, -9/12, -11/12$；$\varepsilon^2=0.1, 0.01, 0.001$，

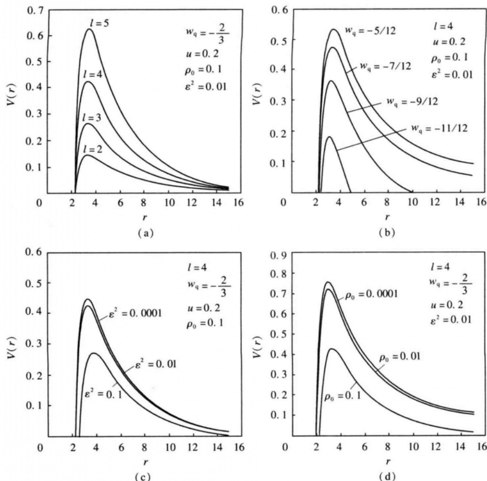


图 3-12 有暗能量的整体单极子黑洞时空标量扰动有效势 $V(r)$ 随 r 的变化

0.0001； $\rho_0 = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$。如图所示，势垒的峰值随着角量子数 l 和 Quintessence 暗能量的状态参数 w_q 的增加而增加，并且峰值产生的位置沿着 r 轴向右移动。另外，随着破缺角参数 ε^2 和 Quintessence 暗能量的能量密度 ρ_0 的减小，势垒的峰值逐渐增加，并且随着 $\varepsilon \to 0$ 和 $\rho_0 \to 0$，势垒的峰值逐渐趋于一个最大值。

图 3-13 描绘了有效势 $V(r)$ 随 r 变化的关系。在给定参数 $l = 4$，$\varepsilon^2 = 0.01$，$\rho_0 = 0.1$，$w_q = -2/3$ 时，随着标量场质量的增加，势垒的峰值和峰值所在位置均随之增大。

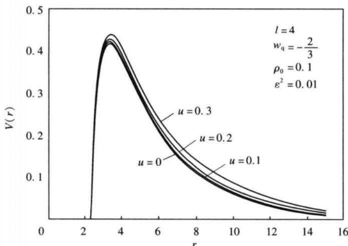


图 3-13 有效势 $V(r)$ 随 r 的变化，$u = 0, 0.1, 0.2, 0.3$

把标量场有效势代入三阶 WKB 近似法的频率公式((2-49)式至(2-51)式)中，可以得到静态球对称 Quintessence 包围的整体单极子黑洞时空中标量场扰动的似正规模频率。数值结果表明：第一，随着 Quintessence 状态参数 w_q 的增加，标量场似正规模频率的实部和虚部的绝对值均增加，这意味着暗能量的出现导致标量场扰动的衰减加快；第二，随着能量密度 ρ_0 和破缺角参数 ε^2 的减小，复频率的实部和虚部的绝对值均线性地增大，并且当 ε^2 或 ρ_0 足够小的时候，实部和虚部的绝对值均达到一个极大值；第三，随着标量场质量 u 的增加，复频率的实部也随之增加，但虚部的绝对值却随之减少，这意味着标量场粒子的质量越大，它的振荡就越快，但衰减频率却减缓了。这可能的解释是，因为扰动会使黑洞以引力波的形式带走能量，但场粒子本身具有能量能够给黑洞以补充，因此，场粒子的质量越大，振荡越快而衰减越慢。更有趣的是，似正规模频率的实部和虚部都是随着标量场质量的变化而做线性

变化的，如图3-14所示，在给定参数 $w_q = -2/3$，$n=0$，$l=2$ 时，静态球对称 Quintessence 暗能量包围的整体单极子黑洞时空的有质量标量场似正规模频率随标量场质量 u 变化的关系：$\varepsilon^2=0.1$，$\rho_0=0.01$；$\varepsilon^2=0.001$，$\rho_0=0.1$。

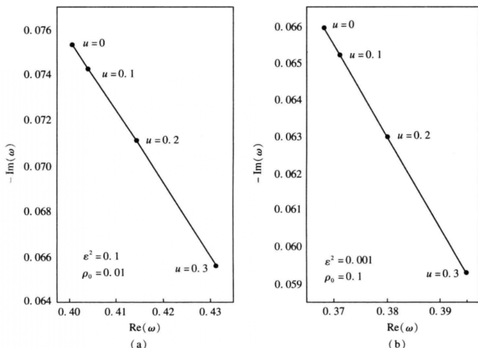


图3-14 似正规模频率随标量场质量 u 变化的关系

由3.3节知识，还可以讨论静态球对称 Quintessence 暗能量包围的整体单极子黑洞时空中引力扰动[41]、Dirac 扰动[42]和电磁扰动[43]的似正规模频率。根据所得的数值结果分析发现，对于不同的扰动场，该黑洞似正规模频率的实部和虚部随黑洞参数变化的行为几乎是一致的。

本章参考文献

[1] 俞允强. 广义相对论引论[M]. 北京：北京大学出版社，1995：2.

[2] Einstein A. English translation in the principle of relativity[M]. New York：Dover，1952：177.

[3] Spergel D N，Verde L，Peiris H V，et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe（WMAP）observations：determination of cosmol-

ogical parameters [J]. Astrophysical Journal Supplement, 2003, 148 (1): 175.

[4] Riess A G, Filippenko A V, Challis P, et al. Observational evidence from supernova for an accelerating universe and a cosmological constant [J]. Astrophysical Journal, 1998, 116(3): 1009.

[5] Bahall N, Ostriker J P, Perlmutter S, et al. The cosmic triangle: revealing the state of the universe [J]. Science, 1999, 284(5419): 1481.

[6] Perlmutter S, Aldering G, Goldhaber G, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernova [J]. Astrophysical Journal, 1999, 517 (2): 565.

[7] Pope A C, Matsubara T, Szalay A S, et al. Cosmological parameters from eigenmode analysis of sloan digital sky survey galaxy redshifts [J]. Astrophysical Journal, 2004, 607(2): 655.

[8] Knop R A, Aldering G, Amanullah R, et al. New constraints on Ω_M, Ω_Λ and w from an independent set of 11 high-redshift supernovae observed with HST [J]. Astrophysical Journal, 2003, 598(1): 102.

[9] Riess A G, Strolger L G, Tonry J, et al. Type Ia supernova discoveries at $z>1$ from the Hubble space telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution [J]. Astrophysical Journal, 2004, 607(2): 665.

[10] Astier P, Guy J, Regnault N, et al. The supernova legacy survey: measurement of Ω_M, Ω_Λ and w from the first year data set [J]. Astronomy Astrophysical, 2006, 447(1): 31.

[11] Benitez N, Riess A G, Nugent P E, et al. The magnification of SN 1997ff, the farthest known supernova [J]. Astrophysical Journal, 2002, 577(1): L1.

[12] Peebles P J E, Ratra B. The cosmological constant and dark energy [J]. Reviews Modern Physical, 2003, 75(2): 559.

[13] Lemaitre G. Evolution of the expanding universe [J]. Proceeding National Academy Sciences, 1934, 20(1): 12.

[14] Steinhardt P J. Critical problems in physics [M]. Princeton: Princeton University Press, NJ, 1997.

[15] Weinberg S. The cosmological constant problem [J]. Reviews Modern Physics, 1989, 61(1): 1.

[16] Ratra B, Peebles P J E. Cosmological consequences of a rolling homoge-

neous scalar field [J]. Physical Review D, 1988, 37(12): 3406.

[17] Peebles P J E, Ratra B. Cosmology with a time variable cosmological constant [J]. Astrophysical Journal, 1988, 325(1): L17.

[18] Caldwell R R. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state [J]. Physics Letters B, 2002, 545(1-2): 23.

[19] Nojiri S, Odintsov S D. Quantum de Sitter cosmology and phantom matter [J]. Physics Letters B, 2003, 562(3-4): 147.

[20] Feng B, Wang X L, Zhang X M. Dark energy constraints from the cosmic age and Supernova [J]. Physics Letters B, 2005, 607(1-2): 35.

[21] Gibbons G W. Cosmological evolution of the rolling tachyon [J]. Physics Letters B, 2002, 537(1-2): 1.

[22] Piazza F, Tsujikawa S. Dilatonic ghost condensate as dark energy [J]. Journal of Cosmology Astroparticle Physics, 2004, 0407(7): 004.

[23] Zlatev I, Wang L M, Steinhardt P J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant [J]. Physical Review Letters, 1999, 82(5): 896.

[24] Steinhardt P J, Wang L M, Zlatev I. Cosmological tracking solutions [J]. Physical Review D, 1999, 59(12):123504.

[25] Ferreira P G, Joyce M. Cosmology with a primordial scaling field [J]. Physical Review D, 1998, 58(2): 023503.

[26] Kiselev V V. Quintessence and black hole [J]. Classical Quantum Gravity, 2003, 20(6): 1187.

[27] Chen S B, Jing J L. Quasinormal modes of a black hole surrounded by quintessence [J]. Classical Quantum Gravity, 2005, 22(21): 4651.

[28] Brill D R, Wheeler J A. Interaction of neutrinos and gravitational fields [J]. Review Modern Physics, 1957, 29(3): 465.

[29] Zhang Y, Gui Y X. Quasinormal modes of gravitational perturbation around a Schwarzschild black hole surrounded by quintessence [J]. Classical Quantum Gravity, 2006, 23(22): 6141.

[30] Zhang Y, Gui Y X, Yu F, et al. Quasinormal modes of a Schwarzschild black hole surrounded by free static spherically symmetric quintessence: electromagnetic perturbations [J]. Classical Quantum Gravity, 2007, 39(4): 1003.

[31] Kibble T W B. Topology of cosmic domains and strings [J]. Journal of

Physics A: Mathematical and General, 1976, 9(8): 1387.

[32] Vilenkin A. Cosmic strings and domain walls [J]. Physics Reports, 1986, 121(5): 263.

[33] Lee K, Nair V P, Weinberg E J. Black holes in magnetic monopoles [J]. Physical Review D, 1989, 45(8): 2751.

[34] Barriola M, Vilenkin A. Gravitational field of a global monopole [J]. Physical Review Letters, 1989,63(4): 341.

[35] Liebling S L. Static gravitational global monopoles [J]. Physical Review D, 2000, 61(2): 024030.

[36] Salgado M. A simple theorem to generate exact black-hole solutions [J]. Classical Quantum Gravity, 2003, 20(21): 4551.

[37] Watabe H, Tom T. Perturtations of global monopoles as a black hole' s hair [J]. Journal of Cosmology Astroparticle Physics, 2004, 0402(6): 001.

[38] Yu H W. Decay of massive scalar hair in the background of a black hole with a global monopole [J]. Physical Review D, 2002, 65(8): 087502.

[39] Jiang Q Q, Wu S Q. Hawking radiation of charged particles as tunneling from Reissner - Nordström - de Sitter black holes with a global monopole [J]. Physics Letters B, 2006, 635(2-3): 51.

[40] Li X Z, Xi P, Zhai X H. Global monopole surrounded by quintessence-like matter [J]. Physics Letters B, 2008, 666(2): 125.

[41] Xi P. Quasinormal modes of a black hole with quintessence-like matter and a deficit solid angle: scalar and gravitational perturbations [J]. Astrophysics and Space Science, 2009, 321(1): 47.

[42] Wang C Y, Gui Y X, Zhang Y. Dirac quasinormal modes of a black hole with quintessence-like matter and a deficit solid angle [J]. Astrophysics and Space Science, 2010, 325(1): 119.

[43] Wang C Y, Zhao Y F, Gao Y J. Quasinormal modes of a black hole with quintessence-like matter and a deficit solid angle for electromagnetic perturbation [J]. Communications in Theoretical Physics, 2012, 57(6): 1101.

第4章 变形Hořava - Lifshitz引力理论中黑洞的似正规模

爱因斯坦广义相对论在现代物理学中，尤其在时空大尺度结构上，显示出越来越大的重要性，然而，量子场论证明广义相对论是不可重整化的。最近，Hořava 提出了一种在四维时空中可以幂次重整化(power-counting renormalizable)的引力理论[1]。该理论在紫外高能区域中，高阶空间曲率项的引入破坏了洛伦兹对称性，使得时间和空间不再等价，从而可以避免广义相对论的重整化困难，为引力量子化提供了可能的方案。此外，在红外低能区域里，高阶微分项没有贡献，该理论能够自动退化到广义相对论理论，并且与广义相对论的各种实验验证相吻合[2-4]。因此，Hořava - Lifshitz(H - L)引力理论认为：广义相对论只是H - L引力理论在低能情况下的近似。

4.1 Hořava - Lifshitz引力理论的基本思想

下面简单介绍H - L引力理论的基本思想。

考虑一个正则化的动能项：

$$\frac{1}{2}\int \dot{\phi} \mathrm{d}^3 x \mathrm{d}t \tag{4-1}$$

式中ϕ是标量场函数，$\dot{\phi}$表示标量场对时间的一阶导数。在洛伦兹对称情形下，时间和空间是平等的，因此，时间t、空间$\vec{x}$和标量场ϕ的标度变化如下：

$$t \to \beta t,\ \vec{x} \to \beta \vec{x},\ \phi \to \beta^{-s}\phi \tag{4-2}$$

式中β是任意常数，s的值根据标量场的标度变换性质来确定。由于正则化动能项的作用量是无量纲的，所以有$s=1$，即$\phi \to \beta^{-1}\phi$。在上述标度变化下，(4-1)式中的各个量分别变为

$$\mathrm{d}t \to \beta \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}\vec{x} \to \beta \mathrm{d}\vec{x},\ \dot{\phi} \to \beta^{-s-1}\dot{\phi} \tag{4-3}$$

假设作用量中还有一项：

$$\frac{1}{2}\int \phi^{(n)}\mathrm{d}t\mathrm{d}^3x \sim E^{ns-4} \tag{4-4}$$

式中的“(n)”表示标量场对 t 的 n 次导数，能量 E 的标度变换为 $E \to \beta^{-1}E$。按照上面的标度变换可知，在满足可幂次重整化条件下，(4-4)式的量纲指标中的 $n \leqslant 4$。也就是说，在满足洛伦兹对称的前提下，幂次可重整化条件要求作用量中不能出现超过标量场函数四次导数的项。然而，广义相对论的作用量并不满足这个条件。为了调和这一矛盾，需要在 H - L 理论中假设洛伦兹对称性在一定条件下可以产生对称破缺。

H - L 理论在低能情形下，可以回归到广义相对论的结论；但在高能情况下，洛伦兹对称性被破坏了，此时，新的标度变换如下：

$$t \to \beta^z t,\ \vec{x} \to \beta \vec{x},\ \phi \to \beta^{-s}\phi \tag{4-5}$$

这里，z 由 t 的标度变换性质决定，只有当 $z=1$ 时，H - L 理论才是洛伦兹对称的。同时，动能项(4-1)式的无量纲条件可写为 $s=\frac{-(z-3)}{2}$。有趣的是，在 $z=3$ 的情形下，$s=0$，也就是说，ϕ 的标度变换本身并不影响量纲。

在新的标度变换下，(4-4)式可变为

$$\frac{1}{2}\int \phi^{(n)}\mathrm{d}t\mathrm{d}^3x \sim E^{\frac{ns-z-3}{z}} \tag{4-6}$$

此时的能量尺度的标度变换是 $E \to \beta^{-z}E$。同样，当 $z \geqslant 3$ 时，有 $s \leqslant 0$，此时 $\frac{ns-z-3}{z} \leqslant 0$ 的条件始终是满足的，这将使得该引力理论中的高阶项始终是可重整化的。实际上，人们已经证明出在 $D+1$ 维的时空中，只要 z 满足 $z \geqslant D$ 时，引力理论就是一个可幂次重整化的理论[5]。因此，理论上人们完全可以构造一个满足在低能时具有洛伦兹对称性，并且在高能情形下满足 $z \geqslant 3$ 的非线性可重整化理论[6]。

4.2 变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中的黑洞

由于洛伦兹对称性的破坏，H - L 理论中的时空不再被视为平权的概念，因此传统的度规形式 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$（$\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3$）在这个新理论中不再适用，取而代之的是将度规进行 ADM(Arnowitt - Dese - Misner)分解的形式。

对一般的四维黑洞的时空度规进行 ADM 分解，可以得到

$$ds_{\text{ADM}}^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i - N^i dt)(dx^j - N^j dt) \tag{4-7}$$

其中，g_{ij}是空间度规分量，$N \equiv (-g^{00})^{-1/2}$叫作时移，$N_i \equiv g_{0i}$叫作位移，其指标升降由$g_{ij}$来完成。

在 ADM 形式下，H－L 理论中的作用量可以构造成

$$S_{\text{HL}} = \int d^3x dt (L_K + L_P) \tag{4-8}$$

式中的L_K是一个与时间函数和空间函数都有关的部分，而L_P则仅与空间度规的曲率张量有关。具体地，Lagrange 动能部分L_K的形式为

$$L_K = \frac{2}{\gamma^2}\sqrt{g} N K_{ij} G^{ijkl} K_{kl} \tag{4-9}$$

式中，$g = \det(g_{ij})$，G^{ijkl}是 DeWitt 度规，满足：

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2}(g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}) - \lambda g^{ij} g^{kl} \tag{4-10}$$

外曲率张量K_{ij}有如下形式：

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\partial_t g_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) \tag{4-11}$$

因此，(4-9)式的L_K也可以写为

$$L_K = \frac{2}{\gamma^2}\sqrt{g} N(K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) \tag{4-12}$$

另外，由于在构造作用量时要求 H－L 理论在低能情形下回到广义相对论的作用量形式，所以在势能部分L_P中必须含有三维的标量曲率R和宇宙学常数项，具体地，有

$$\begin{aligned} L_P &= -\frac{\gamma^2}{2}\sqrt{g} N E^{ij} G_{ijkl} E^{kl} \\ &= \sqrt{g} N\left[\frac{\gamma^2 \mu^2}{8(1-3\lambda)}\left(\frac{1-4\lambda}{4}R^2 + \Lambda_W R - 3\Lambda_W^2\right) - \right. \\ &\left. \frac{\gamma^2}{2w^4}\left(C_{ij} - \frac{\mu w^2}{2}R_{ij}\right)\left(C^{ij} - \frac{\mu w^2}{2}R^{ij}\right)\right] \end{aligned} \tag{4-13}$$

这里张量

$$E^{ij} = \frac{1}{w^2}C^{ij} - \frac{\mu}{2}\left(R^{ij} - \frac{R}{2}g^{ij} + \Lambda_W g^{ij}\right) \tag{4-14}$$

科顿(Cotton)张量

$$C_{ij} = \sigma^{ijk}\nabla_k\left(R_l^j - \frac{1}{4}R\delta_l^j\right) = \sigma^{ijk}\nabla_k R_l^j - \frac{1}{4}\sigma^{ijk}\partial_k R \tag{4-15}$$

式中的w，λ，μ和γ均为自由参数。为了使该理论在大尺度上回到广义相对论理论，则需要对该理论中出现的一些自由参数进行限制。

一般来讲，H - L 理论在红外真空部分是 AdS 时空。为了在红外一段得到 Minkowski 真空，就需要修改 H - L 引力理论[7]。一般采用的办法是，在 L_P 中引入一项 $\mu^4 R$，即 $\tilde{L}_P = L_P + \sqrt{g}N\mu^4 R$，然后取极限情况 $\Lambda_W \to 0$。修改后的引力模型通常被称为变形 H - L 引力理论。变形 H - L 引力理论虽然改变了原始 H - L 引力理论中红外部分的性质，但是没有改变紫外部分的性质。也就是说，只有在红外一段，Minkowski 真空的存在代替了 AdS 时空。

在极限 $\Lambda_W \to 0$ 的情况下，变形 H - L 理论的作用量为

$$S = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\sqrt{g}N\left[\frac{2}{\gamma^2}(K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2) - \frac{\gamma^2}{2w^4}C_{ij}C^{ij} + \frac{\gamma^2\mu}{2w^2}\sigma^{ijk}R_{il}\nabla_j R_k^l - \frac{\gamma^2\mu^2}{8}R_{ij}R^{ij} + \frac{\gamma^2\mu^2}{8(1-3\lambda)}\frac{1-4\lambda}{4}R^2 + \mu^4 R\right] \tag{4-16}$$

如果在(4-16)式中引入坐标变换 $x^0 = ct$，并且令光速 c、牛顿引力常数 G 和参数 λ 满足如下关系：

$$c = \frac{\gamma^2\mu}{4}, \quad G = \frac{\gamma^2}{32\pi c}, \quad \lambda = 1 \tag{4-17}$$

那么作用量(4-16)式可以回到标准的 Einstein - Hilbert 作用量：

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}N(K_{ij}K^{ij} - K^2 + R - 2\Lambda_W) \tag{4-18}$$

考虑如下度规线元：

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 \tag{4-19}$$

并且假设

$$\left.\begin{aligned} R_{rr} &= -\frac{f'(r)}{rf(r)} \\ R_{\theta\theta} &= 1 - f(r) - \frac{r}{2}f'(r) \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta\left[1 - f(r) - \frac{r}{2}f'(r)\right] \end{aligned}\right\} \tag{4-20}$$

可以发现，拉格朗日方程((4-16)式)对角度积分后，可以约化为

$$L = \frac{\gamma^2\mu^2 N}{8\sqrt{f}(1-3\lambda)}\left[\frac{\lambda-1}{2}f'^2 - \frac{2\lambda(f-1)}{r}f' + \frac{(2\lambda-1)(f-1)^2}{r^2} - 2w(1-f-rf')\right] \tag{4-21}$$

其中，$w = \dfrac{8\mu^2(3\lambda-1)}{\gamma^2}$。

由于假定空间部分是渐近平直的，所以科顿张量对(4-21)式没有贡献。

另外，由于 Ricci 张量是对角的，所以(4-16)式的第一行的最后一项对(4-21)式也没有贡献。

对于 $\lambda=1$，则 $w=\frac{16\mu^2}{\gamma^2}$，能够得到一个在变形 H - L 引力理论中的静态、球对称黑洞解，其度规系数

$$N^2=f=\frac{2(r^2-2Mr+\alpha)}{r^2+2\alpha+\sqrt{r^4+8\alpha Mr}} \tag{4-22}$$

其中 $\alpha=\frac{1}{2w}$被称为 H - L 引力参数。可见，当 $\alpha=0$ 时，该黑洞能够回到广义相对论中标准的 Schwarzschild 黑洞时空。M 是相当于黑洞质量的积分常数。

另外，该黑洞时空的视界半径

$$r_{\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\alpha} \tag{4-23}$$

该黑洞内外视界公式在形式上与广义相对论中标准 R - N 黑洞的内外视界形式相似。视界面上的霍金温度

$$T_{\mathrm{H}}=\frac{f'}{4\pi}\bigg|_{r=r_+}=\frac{\sqrt{M^2-\alpha}}{\pi\left(r_+^2+2\alpha+\sqrt{r_+^4+8\alpha Mr_+}\right)} \tag{4-24}$$

4.3 变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中的标量场扰动

下面讨论在变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中，静态球对称黑洞时空中标量场扰动的似正规模频率[8]，有质量标量场的扰动方程满足(3-39)式。

可以给出扰动场的有效势：

$$V(r)=\frac{2(r^2-2Mr+\alpha)}{r^2+2\alpha+\sqrt{r^4+8\alpha Mr}}\left[\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{r^3+2\alpha M}{\alpha r\sqrt{r^4+8\alpha Mr}}+u^2\right] \tag{4-25}$$

由(4-25)式可以看出，有效势与角量子数 l、H - L 引力参数 α、标量场的质量 u 有关，具体的变化关系如图 4-1 和图 4-2 所示。

图 4-1 中(a)和(c)两图描绘了在变形 H - L 引力理论中黑洞时空的无质量标量场有效势 $V(r)$ 随参数 α 变化的关系，其中标量场的质量 $u=0$，曲线分别为 $\alpha=0$，0.2，0.4，0.6；为了方便与广义相对论引力理论中的黑洞似正规模进行比较，(b) 和(d)两图描绘了标准 R - N 黑洞时空的无质量标量场有效势 $V(r)$ 随参数 q 变化的关系，其中曲线分别为 $q^2=0$，0.2，0.4，0.6，$u=0$。从图中可以看出，随着参数 α 的增加，$l=0$ 时势垒的峰值逐渐减小，而 $l=1$ 时势垒的峰值逐渐变大。这一现象与 R - N 黑洞时空情形有所不同。在 R - N

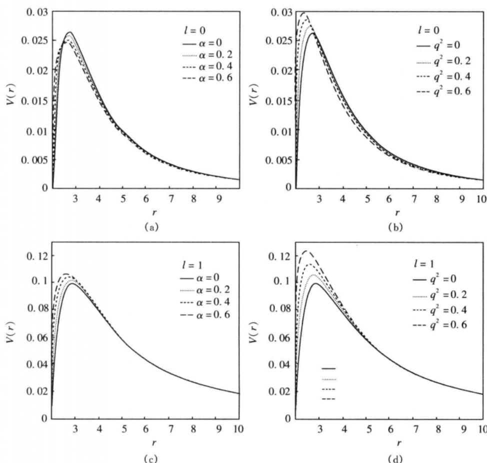
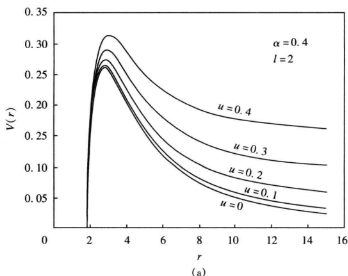


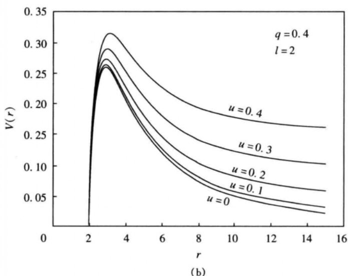
图 4-1　无质量标量场有效势 $V(r)$ 随 r 变化的关系[9]

黑洞时空中，对任意角量子数都有 $V(r)$ 的最大值随着参数 q 的增大而增大。可见，尽管这两个黑洞的内外视界的公式形式上非常相似，但有效势的演化行为却是完全不同的。此外还发现，任意给定角量子数 l，变形 H - L 黑洞时空中无质量标量场有效势的最大值总是小于标准 R - N 黑洞时空中标量场有效势的最大值。

图 4-2(a)所示为变形 H - L 引力理论中静态球对称黑洞时空中有质量标量场扰动的有效势随标量场质量变化的关系，固定参数 $l = 2$ 和 $\alpha = 0.4$，标量场质量分别为 $u = 0$，0.1，0.2，0.3，0.4；图 4-2(b)描绘的是标准 R - N 黑洞时空有质量标量场扰动的有效势随 u 变化的关系，固定参数 $q = 0.4$，并且 l 和 u 的取值与图 4-2(a)相同。从图 4-2 中可以发现，变形 H - L 黑洞时空中标



(a)



(b)

图 4-2　有质量标量场有效势 $V(r)$ 随 r 变化的关系

量场有效势的最大值随着u的增加而增大，并且势垒所在的位置沿着 r 轴正向移动。这一现象与标准 R－N 黑洞时空情形非常相似。

把有效势((4-25 式)代入三阶 WKB 近似法的公式((2-49)式至(2-51)式)中，可以计算出在变形 H－L 引力理论中静态球对称黑洞的有质量标量场扰动的似正规模频率。表 4-1 所示为 $l=2$，$n=0$ 时复频率的数值结果。

表4-1 变形 H - L 引力中黑洞时空的有质量标量场的似正规模频率

α	ω ($u=0$)	ω ($u=0.1$)	ω ($u=0.2$)	ω ($u=0.3$)
0	0.48321 - 0.09681i	0.48637 - 0.09572i	0.49589 - 0.09243i	0.51191 - 0.08683i
0.1	0.48693 - 0.09521i	0.49002 - 0.09418i	0.49936 - 0.09105i	0.51507 - 0.08570i
0.2	0.49085 - 0.09351i	0.49388 - 0.09253i	0.50302 - 0.08957i	0.51841 - 0.08449i
0.3	0.49501 - 0.09186i	0.49797 - 0.09076i	0.50690 - 0.08796i	0.52195 - 0.08316i
0.4	0.49942 - 0.08970i	0.50231 - 0.08884i	0.51102 - 0.08622i	0.52571 - 0.08169i
0.5	0.50412 - 0.08752i	0.50693 - 0.08673i	0.51541 - 0.08429i	0.52972 - 0.08007i
0.6	0.50915 - 0.08511i	0.51188 - 0.08438i	0.52011 - 0.08214i	0.53401 - 0.07824i
0.7	0.51456 - 0.08239i	0.51719 - 0.08173i	0.52516 - 0.07970i	0.53862 - 0.07614i
0.8	0.52039 - 0.07926i	0.52293 - 0.07868i	0.53060 - 0.07688i	0.54359 - 0.07371i
0.9	0.52671 - 0.07557i	0.52915 - 0.07508i	0.53650 - 0.07354i	0.54898 - 0.07080i
0.99	0.53285 - 0.07157i	0.53518 - 0.07117i	0.54223 - 0.06991i	0.55421 - 0.06763i

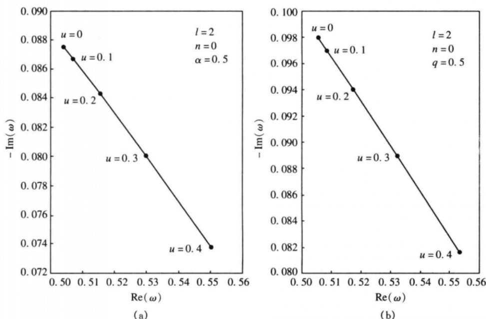


图4-3 似正规模频率随标量场质量 u 变化的关系

图4-3(a)描绘了在变形 H - L 引力理论中，静态球对称黑洞时空的标量场扰动的似正规模频率的实部与虚部绝对值之间的变化关系；图4-3(b)图描绘了广义相对论中标准 R - N 黑洞的似正规模情形。从图4-3 可以看出，在新的

引力理论中，随着标量场质量 u 的增加，复频率的实部也随之增加，但虚部的绝对值随之减少，并且实部与虚部之间几乎是做线性变化的。这一现象与广义相对论下的标准 R－N 黑洞时空中的变化行为极为相似。这意味着标量场粒子的质量越大，振荡越快，其振荡的衰减越慢。

4.4 变形 Hořava－Lifshitz 引力理论中的 Dirac 场扰动

本节讨论在变形 Hořava－Lifshitz 引力理论中，静态球对称黑洞的无质量 Dirac 场扰动[10]。

由 3.3.2 节中对 Dirac 场扰动的介绍可知，在变形 H－L 引力理论下，静态球对称黑洞时空中的 Dirac 扰动场的有效势 $V(r)$ 与角量子数 k 和 H－L 参数 α 有关，并且它们以势垒的形式存在。图 4-4 所示为无质量 Dirac 扰动场的有效势随角量子数变化的行为。从图 4-3 可以发现，当固定参数 $\alpha=0.1$ 时，有效势势垒的峰值随着 $|k|$ 的增大而增高，并且峰值所在的位置 r_p 沿着横轴向右移动。图 4-5 给出了 $V(r)$ 随 r 变化的关系。对于固定 $|k|=5$，势垒的最大值随着 α 的增加而增大，但峰值所在的位置则随 α 的增加而减小。

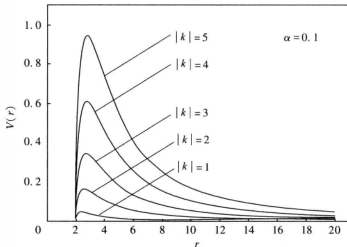


图 4-4 有效势 $V(r)$ 随 r 变化的关系，$|k|=1, 2, 3, 4, 5$

利用三阶 WKB 近似方法可以计算出似正规模频率的数值结果。图 4-6 给出了复频率的实部 $\mathrm{Re}(\omega)$ 与虚部绝对值 $-\mathrm{Im}(\omega)$ 之间的变化关系。

从图 4-6 可以看出，无质量 Dirac 扰动的似正规模频率的实部随着 H－L 参数 α 的增加而增加，而虚部的绝对值随之减小。这个现象说明，H－L 参数

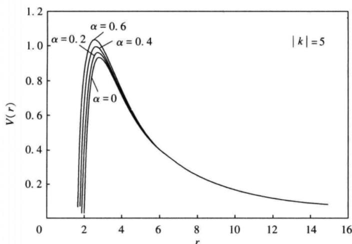


图 4-5 有效势 $V(r)$ 随 r 变化的关系，曲线分别为 $\alpha=0$，0.2，0.4，0.6

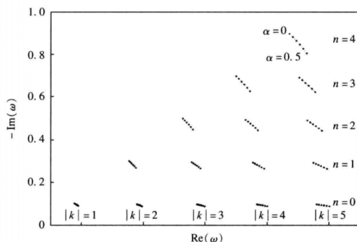


图 4-6 实部与虚部绝对值之间的变化关系

越大，无质量 Dirac 扰动场的振荡频率就越大，但其衰减的速度变慢。此外，将得到的上述结论与广义相对论中标准 Schwarzchild 黑洞[11] 和标准 R - N 黑洞[12] 的无质量 Dirac 似正规模频率相比较，可以发现，在变形 H - L 引力理论中的黑洞似正规模的虚部更小一些，这表明，在变形 H - L 引力模型中，微扰场的衰减速度更慢一些。

本章参考文献

[1] Hořava P. Quantum gravity at a Lifshitz point [J]. Physical Review D, 2009, 79(8): 084008.

[2] Hořava P. Spectral dimension of the universe in quantum gravity at a Lifshitz point [J]. Physical Review Letters, 2009, 102(16): 161301.

[3] Hořava P, Melby-Thompson C M. General covariance in quantum gravity at a Lifshitz point [J]. Physical Review D, 2010, 82(6): 064027.

[4] Gumrukcuoglu A E, Mukohyama S, Wang A. General relativity limit of Hořava - Lifshitz gravity with a scalar field in gradient expansion [J]. Physical Review D, 2012, 85(6): 064042.

[5] Visser M. Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator [J]. Physical Review D, 2009, 80(2): 025011.

[6] Mukohyama S. Hořava - Lifshitz cosmology: a review [J]. Classical Quantum Gravity, 2010, 27(22): 223101.

[7] Kehagias A, Sfetsos K. The black hole and FRW geometries of non-relativistic gravity [J]. Physics Letters B, 2009, 678(1): 123.

[8] Wang C Y, Gao Y J. Massive scalar field quasinormal modes of a black hole in the deformed Hřrava - Lifshitz gravity [J]. Central European Journal of Physics, 2012, 10(1): 40.

[9] Chen S B, Jing J L. Quasinormal modes of a black hole in the deformed Hořava - Lifshitz gravity [J]. Physics Letters B, 2010, 687 (2-3): 124.

[10] Wang C Y, Gui Y X. Dirac quasinormal modes of the deformed Hořava - Lifshitz black hole space-time [J]. Astrophysics and Space Science, 2009, 325(1): 85.

[11] Cho H T. Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole spacetimes [J]. Physical Review D, 2003, 68(2): 024003.

[12] Wu Y J, Zhao Z. Dirac quasinormal modes in Reissner - Nordström spacetimes [J]. Physical Review D, 2004, 69(8): 084015.